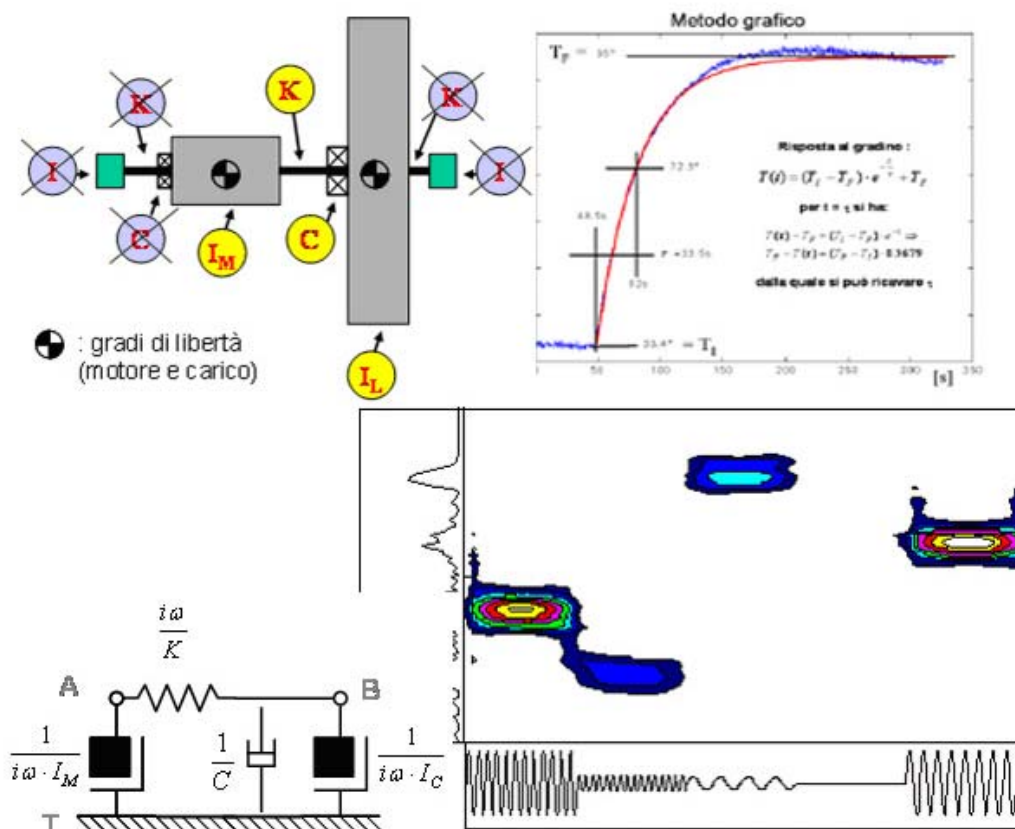
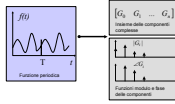


Università di Trento, Facoltà di Ingegneria Meccanica

APPUNTI DI MISURE MECCANICHE IN REGIME DINAMICO



Mariolino De Cecco



Indice

1	Introduzione	1
2	Trasformata di Fourier	1
2.1	Scomposizione di un segnale in una base di funzioni orto-normali.....	1
2.2	Rappresentazione mediante DFT (Discrete Fourier Transform).....	8
2.3	Alcune proprietà della trasformata di Fourier	8
2.4	Trasformazione di una equazione differenziale in una equazione algebrica	9
2.5	Funzione di trasferimento Sinusoidale	10
2.6	Esempio di impiego trasformata per considerazioni quantitative/qualitative	13
3	Taratura dinamica.....	15
3.1	Tecniche nel dominio della frequenza	15
3.1.1	Mediante ingressi armonici variabili in frequenza	15
3.1.2	Mediante rapporto tra le trasformate	16
3.2	Tecniche nel dominio del tempo	19
3.2.1	Mediante ingressi canonici e modello matematico	19
3.3	Considerazioni sulla relazione tra costante di tempo e funzione di trasferimento....	22
4	Filtraggio in frequenza	23
4.1	Filtraggio mediante manipolazione diretta della trasformata di Fourier.....	26
5	Compensazione dinamica.....	29
6	Determinazione funzioni di trasferimento mediante Parametri Concentrati ed Impedenze Generalizzate.....	39
6.1	Modellazione a parametri concentrati	39
6.2	Le Impedenze Generalizzate	40
6.3	Procedura per la determinazione della rete equivalente.....	42
6.3.1	Esempio di semplice sistema per l'isolamento dalle vibrazioni.....	43
6.3.2	Esempio a tre gradi di libertà	46
6.3.3	Esempio di accoppiamento motore-carico	47
	Bibliografia.....	51

1 Introduzione

Nella scienza delle misure stanno esplodendo due settori apparentemente non collegati: sensori al silicio, derivanti dalle tecnologie consolidate dei *micro-chip*, stanno soppiantando i tradizionali sensori (nonostante questi ultimi possiedano qualità metrologiche nettamente superiori); nuovi strumenti di elaborazione dati (PC, DSP, micro-controllori, etc), sempre più potenti ed economici, stanno promuovendo l'impiego di algoritmi sempre più complessi (reti neurali, *fuzzy sets*, *wavelets*, etc).

I due aspetti, oltre che essere legati allo stesso fenomeno tecnologico, sono concorrenti nello stimolare il seguente approccio: utilizzare sensori di bassa qualità accoppiati a sistemi di acquisizione ed elaborazione complessa dei dati. In altre parole, le necessità di mercato stanno spingendo verso la ricerca di sensori che sfruttino le tecnologie consolidate della lavorazione del silicio (che non hanno solo il vantaggio della produzione in larga scala e quindi basso costo, ma anche estrema miniaturizzazione ed integrazione con eventuale elettronica di condizionamento del segnale), verso sistemi d'acquisizione e registrazione sempre più potenti (in termini di velocità, risoluzione e capacità d'immagazzinamento dati) ed elaboratori sempre più efficienti che consentono di impiegare algoritmi avanzati capaci di incrementare l'accuratezza anche da misure effettuate tramite sensori di bassa qualità metrologica.

2 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier trasforma il segnale dal dominio del tempo al dominio della frequenza. In altre parole una funzione del tempo viene rappresentata, tramite opportuni coefficienti, in una funzione della frequenza evidenziando quali componenti armoniche compaiono nel segnale.

Vi sono proprietà della trasformata di Fourier che ricorrono in altre trasformate quali la WT e la STFT (denominata anche trasformata di Gabor) e che sono essenziali per l'interpretazione dei risultati della trasformazione e di eventuali operazioni in frequenza quali filtri. Tali concetti sono la scomposizione di una funzione secondo una base di funzioni ortonormali e la reversibilità della trasformata.

2.1 Scomposizione di un segnale in una base di funzioni orto-normali

Per comprendere il concetto di scomposizione si può pensare al parallelo vettoriale: un vettore nel piano può essere scomposto secondo due direzioni mutuamente ortogonali. In tale maniera si ottiene la scomposizione mediante la semplice relazione del prodotto scalare:

$$\underline{v} = \alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2 \quad (1)$$

dove \underline{e}_1 ed \underline{e}_2 sono i versori delle direzioni mutuamente ortogonali ($\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$). Grazie alla proprietà di ortogonalità della base posso scrivere infatti:

$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{v} \cdot \underline{e}_1 = (\alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 \\ \beta &= \underline{v} \cdot \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

che definisce l'operazione di scomposizione tramite la semplice operazione di prodotto scalare.

La equazione 1 suggerisce di considerare il vettore in una maniera diversa, ovvero considerando le sole componenti lungo i due versori:

$$\underline{v} \mapsto [\alpha, \beta] \quad (2')$$

tale rappresentazione consente di effettuare considerazioni sul vettore solamente tramite le sue componenti nelle direzioni della base ortogonale di vettori \underline{e}_1 ed \underline{e}_2 . Ovvero il vettore può essere 'pensato'

come una ‘freccia’ nel piano oppure come insieme di componenti. Tale concetto è illustrato nella figura seguente.

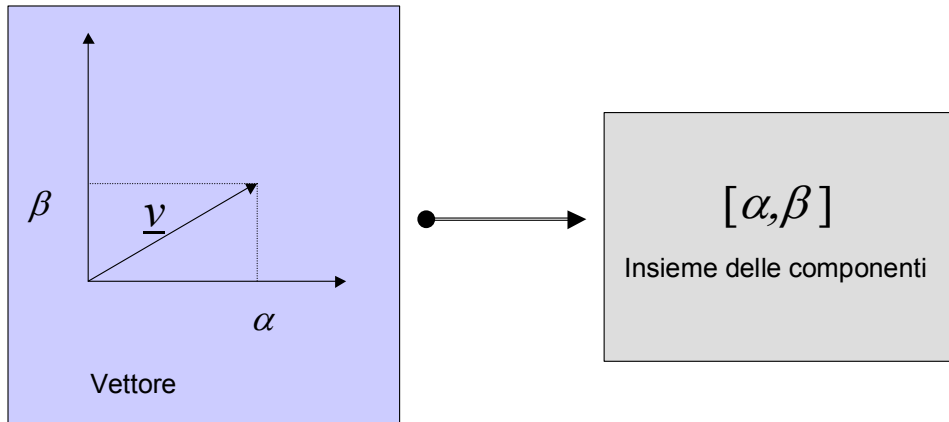


Fig. 2.1 Corrispondenza tra un vettore nel piano e l'insieme delle sue componenti lungo una coppia di versori ortogonali.

La relazione di eguaglianza espressa in equazione 1 garantisce la reversibilità, ovvero dati i parametri della trasformazione in componenti vettoriali lungo una coppia di direzioni ortogonali, è possibile risalire esattamente al vettore originario. Vedremo che non tutte le trasformazioni sono reversibili e che la reversibilità garantisce una corretta interpretazione delle operazioni effettuate nel dominio della trasformata. Introducendo ad esempio il concetto di filtro sulle componenti vettoriali come quell'operatore che fornisce la sola componente lungo \underline{e}_1 , si ottiene il valore del coefficiente α che si sa essere esattamente corrispondente al vettore tolta la componente lungo l'altra direzione. Questa sembrerebbe una tautologia, ma, applicata alle trasformazioni di segnale, giustifica e fornisce la corretta interpretazione alle operazioni di manipolazione in frequenza quali il filtraggio: in una comune operazione di filtraggio passa-basso si ha la certezza di aver eliminato le componenti armoniche del segnale ad alta frequenza e di aver lasciato inalterate le rimanenti.

Dalla 1 e la 2 si ottiene:

$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 + (\underline{v} \cdot \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 \quad (3)$$

che riassume i concetti prima espressi.

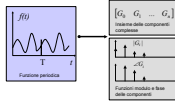
Per i segnali temporali vale un ragionamento analogo. Per semplicità considereremo lo sviluppo in serie invece della trasformata di Fourier in quanto da esso è poi possibile, tramite passaggio al limite, ricavare la formula della trasformata [1].

Una funzione periodica gode della proprietà che $g(t) = g(t + nT)$ per ogni valore n intero. T è il periodo ed $f_0 = 1/T$ è la frequenza fondamentale. Mentre $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione. Essa può essere scomposta in serie di Fourier:

Avendo un segnale $s(t)$, rappresentabile nel dominio del tempo, si può definire lo sviluppo di Fourier tramite la relazione invertibile:

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) \quad (4)$$

Dove $\omega_n = 2\pi n f_0$.



I coefficienti a_n e b_n vengono ricavati secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(\omega_n t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(\omega_n t) dt
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

la equazione 4 vuol dire scomporre la funzione $g(t)$ secondo la base di funzioni orto-normali sinusoidali. Tale concetto è esattamente duale a quello applicabile alla scomposizione vettoriale: la equazione 4 corrisponde con la 1 e la 5 con la 2.

Per convincersi di ciò basta definire il prodotto scalare tra funzioni periodiche:

$$g(t) \bullet f(t) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot f^*(t) dt
 \tag{6}$$

dove con $f^*(t)$ si intende la funzione complessa coniugata di $f(t)$ che nel caso di funzioni reali coincide con se stessa.

Sostituendo la definizione di equazione 6 nella 4 si ottiene una forma analoga alla 3:

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (g(t) \bullet \cos(\omega_n t)) \cdot \cos(\omega_n t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (g(t) \bullet \sin(\omega_n t)) \cdot \sin(\omega_n t)
 \tag{7}$$

tale equazione risulta essere valida proprio in quanto alla ortonormalità della base di funzioni:

$$\begin{aligned}
 \sin(\omega_n t) \bullet \sin(\omega_n t) &= 1 \\
 \cos(\omega_n t) \bullet \cos(\omega_n t) &= 1 \\
 \cos(\omega_n t) \bullet \sin(\omega_n t) &= 0 \\
 \cos(\omega_n t) \bullet \cos(\omega_p t) &= 0 \forall n \neq p \\
 \sin(\omega_n t) \bullet \sin(\omega_p t) &= 0 \forall n \neq p
 \end{aligned}$$

La equazione 7 e 4 suggeriscono una rappresentazione analoga a quella mostrata in figura 2.1 e rappresentata in figura 2.2.

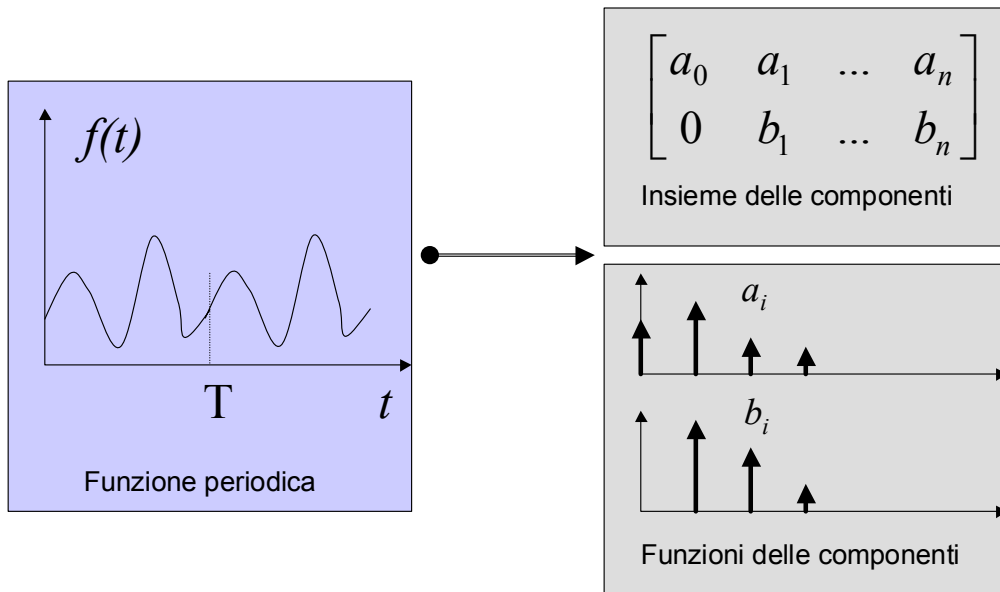


Fig. 2.2 Corrispondenza tra una funzione del tempo e l'insieme delle sue componenti secondo una base di funzioni ortonormali.

Secondo la figura 2.2 si potrebbe ragionare indifferentemente (grazie alla relazione di eguaglianza di equazione 4) sulla funzione del tempo oppure su due funzioni (discrete) che rappresentano le componenti della scomposizione secondo Fourier. Esiste una rappresentazione però più significativa dal punto di vista della analisi segnali e soluzione di equazioni differenziali associate a sistemi lineari. Per determinare tale rappresentazione è necessario elaborare la equazione 4 impiegando la formula di Eulero:

$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i \cdot \text{sen}(\omega_n t)$$

che porta ad esprimere le funzioni armoniche seno e coseno come:

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$$

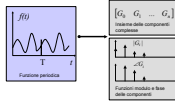
$$\text{sen}(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

le quali, sostituite nella equazione 4, comportano:

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \cdot e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot e^{-i\omega_n t}$$

dalla quale, ponendo:



$$G_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$G_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad (7')$$

$$G_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = G_n^*$$

si può scrivere:

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t}$$

da cui, componendo i vari addendi, si ottiene:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t} \quad (8)$$

Rimane valida la condizione di ortonormalità della base di funzioni:

$$e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}it} = \int_0^T e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}it} = \delta_{i,n}$$

dove $\delta_{i,n}$ è il delta di Kroneker.

Le componenti efficaci di ognuna di queste funzioni (ovvero quanto ognuna di tali funzioni pesa nella ricostruzione della funzione $g(t)$ del tempo) si ricava in maniera analoga alle precedenti:

$$G_n = g(t) \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot (e^{i\omega_n t})^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot e^{-i\omega_n t} dt \quad (9)$$

La differenza tra l'espressione di equazione 4 e quella della equazione 8 è che nel primo caso si tratta di coefficienti a_n e b_n reali, nel secondo di coefficienti complessi di cui, come è schematizzato in figura 2.3, è possibile rappresentare le due funzioni modulo e fase in funzione della frequenza. Tali moduli e fasi, è facile convincersene tenendo conto dei passaggi che hanno condotto dalla formula 4 alla 11, sono proprio i moduli e le fasi delle componenti armoniche che compongono il segnale $s(t)$. Tale rappresentazione complessa, anche definita spettro del segnale, ha anche il vantaggio di consentire una immediata valutazione della risposta di un sistema regolato da equazioni differenziali lineari conoscendo le componenti G_n del segnale in ingresso. La dimostrazione di ciò verrà riportata tra breve.

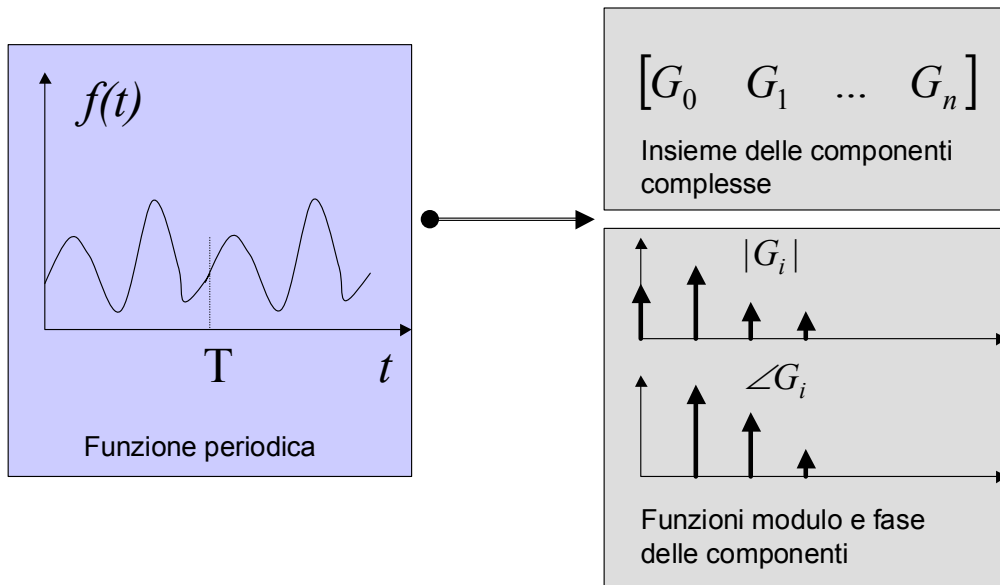


Fig. 2.3 Corrispondenza tra una funzione del tempo e l'insieme delle sue componenti secondo una base di funzioni complesse ortonormali oppure con due funzioni discrete che rappresentano l'andamento dell'insieme dei coefficienti (una per il modulo e l'altra per la fase).

La proprietà della reversibilità, valida per l'eguaglianza espressa nell'equazione 4, permette di effettuare operazioni di manipolazione in frequenza, quindi di antitrasformare tornando nel dominio del tempo avendo la certezza di non aver introdotto ulteriori elaborazioni a causa della doppia trasformazione. Un classico esempio è l'operazione di filtraggio passa-basso su segnali aventi una componente additiva di rumore in alta frequenza. In tale caso l'operazione di filtraggio passa-basso assicura l'eliminazione delle sole componenti in alta frequenza ipotizzate appartenenti al rumore.

Funzioni non periodiche possono essere immaginate come funzioni periodiche dal periodo $T \rightarrow \infty$ e quindi la frequenza fondamentale $f_0 \rightarrow 0$. Le scomposizioni di equazioni 8 e 9 assumono dunque la forma definita come trasformazione di Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad (10)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (11)$$

notare la convenzione impiegata per indicare la trasformata di una funzione $g(t)$ con la lettera maiuscola, ovvero come $G(\omega)$.

La condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata è che il segnale $g(t)$ abbia energia finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

In tale maniera infatti non possono esistere componenti armoniche persistenti (ovvero il segnale risulta anche essere aperiodico) e quindi a modulo infinito (si ricordi che l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t)^2 dt \rightarrow \infty$). Ed in definitiva si ha una funzione finita delle componenti armoniche (lo spettro).

Le funzioni che rappresentano le componenti della scomposizione (analoghe a quelle rappresentate in figura 2.3) in questo caso non saranno più funzioni discrete, bensì continue in quanto l'intervallo di spaziatura sulle ascisse (nel dominio della pulsazione) pari a $2\pi/T$ tende a zero e definisce quindi una funzione continua.

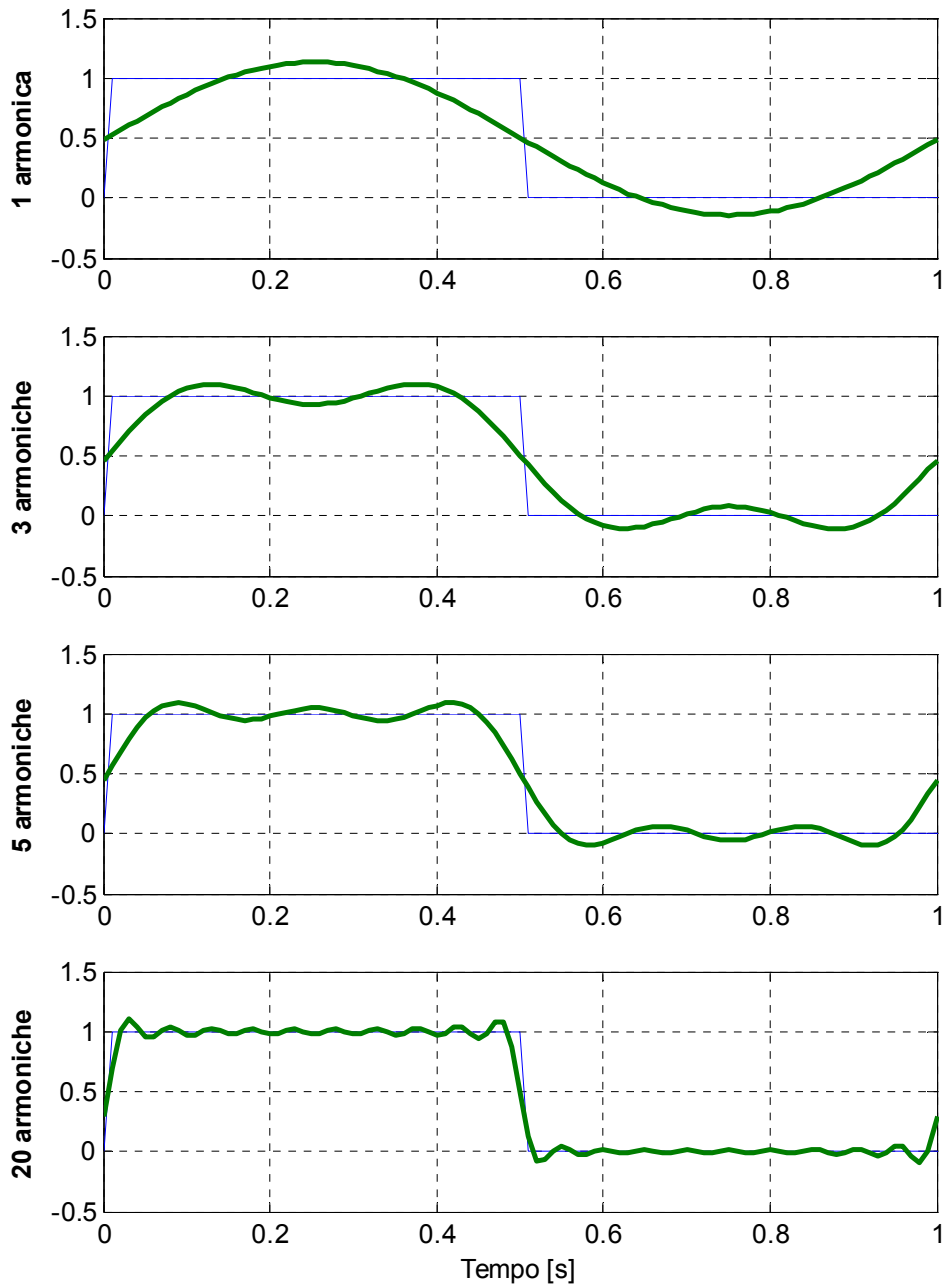
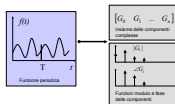


Fig. 2.4 – Segnale ad onda quadra ed approssimazioni con diverse componenti armoniche.



2.2 Rappresentazione mediante DFT (Discrete Fourier Transform)

Occorre passare a segnali di tipo discreto poiché i dati acquisiti dal modulo di acquisizione digitale e registrati su memoria a semiconduttore sono delle sequenze discrete e finite di valori quantizzati. Dunque non si parlerà più del segnale $s(t)$, ma del vettore $s(k)$, dove $k = 1 \dots N$, caratterizzato da una sequenza di valori $s(k)$ e dalla frequenza di campionamento f_c .

In questo paragrafo vengono richiamati i concetti di rappresentazione dei coefficienti della scomposizione di un segnale digitale nella base di funzioni ortonormali armoniche [1]. Si consideri una sequenza s_n con $n=1 \dots N$, risultato di una conversione analogico-digitale con periodo T_c . La sequenza Sf_n , risultato della trasformazione secondo Fourier, avrà lo stesso numero di campioni N ed una risoluzione in frequenza Δf pari a $1/N \cdot T_c$. Tale risoluzione in frequenza ha origine dal fatto che alla frequenza di campionamento f_c , digitalizzando N campioni si copre un periodo temporale pari ad $N \cdot T_c$ da cui l'armonica di massimo periodo presente nella scomposizione è quella avente periodo $N \cdot T_c$. È immediato concludere quindi che la minima frequenza (è superfluo ribadire che la frequenza è l'inverso del periodo) presente nel segnale è pari ad $1/N \cdot T_c$.

L'ultimo valore dello spettro corrisponde alla frequenza $1/T_c$ pari alla frequenza di campionamento f_c . Il teorema di Nyquist assegna però significato alla sola banda $0 \div f_c/2$. È questo il motivo per cui dalla frequenza di Nyquist ($f_c/2$) alla frequenza di campionamento si ha una semplice ripetizione dello spettro ribaltato, ovvero le componenti negative dello spettro.

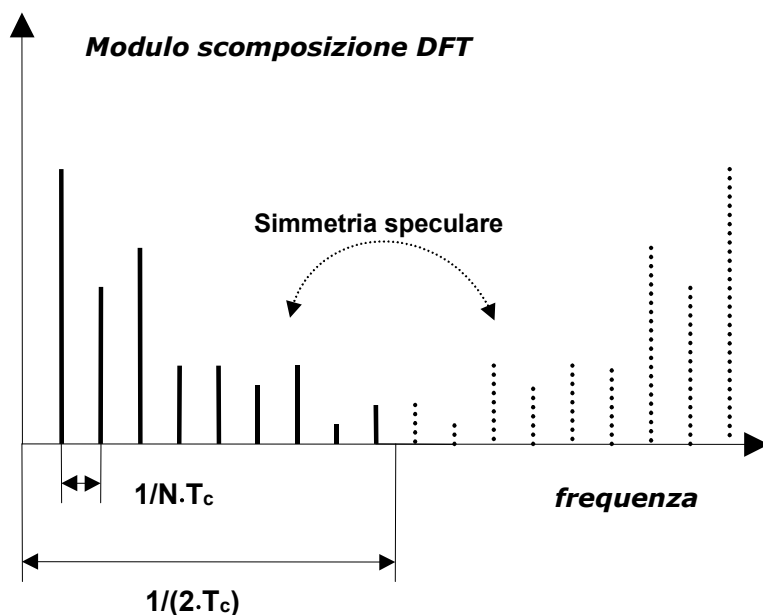
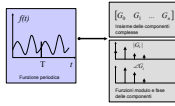


Fig. 2.5 Rappresentazione dei coefficienti della scomposizione di Fourier mediante DFT. La trasformazione possiede contenuto informativo sino alla frequenza di Nyquist, oltre si ha uno specchio delle componenti.

2.3 Alcune proprietà della trasformata di Fourier



<i>Linearità</i>	$ax_1 + bx_2 \mapsto aX_1 + bX_2$
<i>Dualità</i>	$X(t) \mapsto x(-\omega)$
<i>VariationeScala</i>	$x(at) \mapsto \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
<i>Coniugazione</i>	$x^*(t) \mapsto X^*(-\omega)$
<i>TraslazioneTempo</i>	$x(t - \tau) \mapsto X(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$
<i>Modulazione</i>	$x(t) \cdot e^{-i\omega_0 t} \mapsto X(\omega - \omega_0)$
<i>Integrale</i>	$\int x(t) \cdot dt \mapsto \frac{1}{i\omega} X(\omega)$
<i>Derivata</i>	$\frac{d}{dt} x(t) \mapsto i\omega \cdot X(\omega)$
<i>Convoluzione</i>	$x(t) \otimes y(t) \mapsto X(\omega) \cdot Y(\omega)$
<i>Prodotto</i>	$x(t) \cdot y(t) \mapsto X(\omega) \otimes Y(\omega)$

2.4 Trasformazione di una equazione differenziale in una equazione algebrica

Supponiamo di aver definito la equazione differenziale di un sistema del secondo ordine:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = c \cdot u(t)$$

dove la $u(t)$ è la forzante del sistema, ovvero l'ingresso, mentre la $y(t)$ è la risposta del sistema, ovvero l'uscita.

Trasformando secondo Fourier, tenendo presente le proprietà enunciate nel §2.3, si ottiene che:

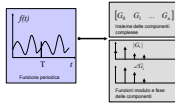
$$g(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt} \mapsto i\omega \cdot Y(\omega) \equiv G(\omega)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (g(t)) \mapsto i\omega \cdot G(\omega) = (i\omega)^2 \cdot Y(\omega)$$

e quindi la seguente equazione:

$$(i\omega)^2 \cdot Y(\omega) + i\omega \cdot a \cdot Y(\omega) + b \cdot Y(\omega) = c \cdot U(\omega)$$

che non è altro se non una equazione algebrica che può essere risolta rispetto all'uscita:



$$Y(\omega) = \frac{c}{b + i\omega \cdot a + (i\omega)^2} \cdot U(\omega)$$

che indica che la trasformata dell'uscita del sistema è pari alla trasformata dell'ingresso moltiplicata per una funzione anch'essa della frequenza (o pulsazione, il che è equivalente) che dipende solamente dalla forma della equazione differenziale che regola il sistema stesso, ovvero dai parametri a e b . Tale funzione complessa viene definita funzione di trasferimento.

Per convenzione la funzione di trasferimento viene indicata come $H(\omega)$ per cui la precedente relazione si scrive in forma generale:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) \tag{12}$$

Dalla precedente è immediato ricavare la funzione di trasferimento come rapporto delle trasformate:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

2.5 Funzione di trasferimento Sinusoidale

Supponiamo di avere in ingresso ad un sistema un ingresso puramente armonico, per ipotesi sinusoidale:



Fig. ... Rappresentazione ingresso-uscita di un sistema dinamico regolato da equazione differenziale lineare.

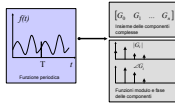
Ovvero abbiamo $u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t)$. Il nostro obiettivo è adesso determinare l'uscita $y(t)$. Vedremo che si determina in maniera immediata dalla conoscenza di modulo e fase della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione dell'ingresso.

Per determinarlo passiamo attraverso le trasformate, dunque trasformiamo l'ingresso:

$$u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t) \mapsto U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (\cos(\omega \cdot t) - i \sin(\omega \cdot t)) dt$$

Tale trasformata vale chiaramente zero $\forall \omega \neq \omega_0$ grazie alla proprietà di ortonormalità delle funzioni armoniche. Per $\omega = \omega_0$ ed $\omega = -\omega_0$ occorre invece calcolarne i valori.

$$\begin{aligned} U(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (-i \sin(\omega_0 \cdot t)) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega_0 \cdot t) dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\omega_0 \cdot t)}{2} dt = \frac{-i}{2} \cdot \infty \end{aligned}$$



$$U(-\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (i \sin(\omega_0 \cdot t)) dt = i \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega_0 \cdot t) dt$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\omega_0 \cdot t)}{2} dt = \frac{i}{2} \cdot \infty$$

Volendo rappresentare lo spettro della funzione seno si ha dunque il grafico che segue.

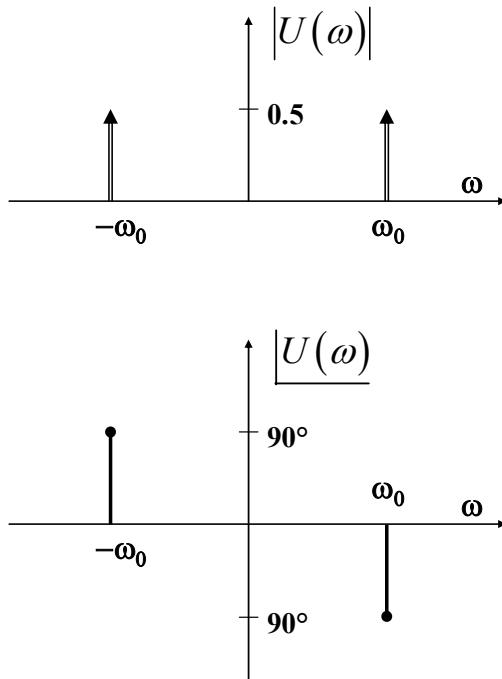


Fig. ... rappresentazione dello spettro della funzione sinusoidale. In modulo ha due componenti di valore infinito del primo ordine con modulo 0.5 (ovvero due delta di Dirac di valore 0.5). Come fase due valori antisimmetrici di 90° e -90° . Globalmente lo spettro delle componenti a pulsazioni positive risultano essere i valori coniugati delle componenti a pulsazioni negative, come risulta anche dall'equazione 7'.

Globalmente la trasformata dell'ingresso si può scrivere quindi come somma di due delta di Dirac:

$$U(\omega) = \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

Dove con delta di Dirac $\delta(\omega - \omega_0)$ si intende la funzione che vale infinito per $\omega = \omega_0$ ed è nulla altrove. Se integrata tale funzione, avendo dominio infinitesimo ma valore infinito, risulta

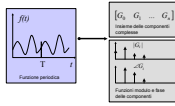
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \cdot d\omega = 1$. Se come argomento dell'integrale si ha una generica funzione $H(\omega)$, risulta

$\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot d\omega = H(\omega_0)$. Questo semplicemente perché l'infinito rappresentato dalla delta di

Dirac moltiplica il valore della funzione in corrispondenza della pulsazione ω_0 facendo assumere al prodotto un valore infinito di modulo $H(\omega_0)$ che, integrato su di un dominio infinitesimo produce un risultato finito pari al valore assunto dalla funzione in corrispondenza della pulsazione ω_0 .

A questo punto è immediato determinare il valore della trasformata dell'uscita:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = H(\omega) \cdot \left(\frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right)$$



Che porta ad avere una somma di due delta con moduli pari al valore della funzione di trasferimento in corrispondenza dei due infiniti:

$$Y(\omega) = H(-\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - H(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

La funzione di trasferimento può essere scomposta in modulo e fase:

$$H(\omega) = M(\omega) \cdot e^{i\Phi(\omega)}$$

Per cui si ha:

$$Y(\omega) = M(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \cdot e^{-i\Phi(\omega_0)} - M(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{i\Phi(\omega_0)}$$

In cui si sono semplicemente sostituiti i valori e considerata la proprietà dello spettro di un segnale reale: modulo simmetrico e fase antisimmetrica, secondo l'equazione 7'.

Considerando l'equazione di Eulero: $e^{i\Phi(\omega_0)} = \cos(\Phi(\omega_0)) + i \cdot \sin(\Phi(\omega_0))$ si ottiene, dopo semplice manipolazione:

$$\frac{Y(\omega)}{M(\omega_0)} = \cos(\Phi(\omega_0)) \cdot \left[\frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right] + \sin(\Phi(\omega_0)) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right]$$

Del primo termine sappiamo immediatamente calcolare l'antitrasformata avendo appena calcolato la trasformata della funzione seno. Il secondo termine è anche immediatamente antitrasformabile in quanto vale:

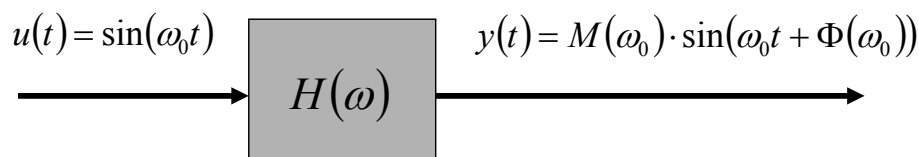
$$\cos(\omega_0 t) \mapsto \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0).$$

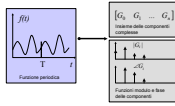
In definitiva, quindi:

$$y(t) = M(\omega_0) \cdot \cos(\Phi(\omega_0)) \cdot \sin(\omega_0 t) + M(\omega_0) \cdot \sin(\Phi(\omega_0)) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Ovvero:

$$y(t) = M(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi(\omega_0)) \tag{13}$$





Che esprime il fatto che se si pone in ingresso ad un sistema regolato da equazioni differenziali lineari un ingresso armonico di modulo unitario e pulsazione ω_0 , l'uscita sarà un'armonica di pari pulsazione ω_0 ma di modulo pari al modulo della funzione di trasferimento $H(\omega_0)$ calcolata per la pulsazione ω_0 e sfasata della fase della funzione di trasferimento $\Phi(\omega_0)$ calcolata per la stessa pulsazione ω_0 .

A tale risultato era possibile giungere semplicemente considerando l'equazione 12:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i\Phi_U(\omega)}$$

$$= M_H(\omega) \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i(\Phi_H(\omega) + \Phi_U(\omega))}$$

Che esprime appunto il fatto che i moduli si moltiplicano e le fasi si sommano.

2.6 Esempio di impiego trasformata per considerazioni quantitative/qualitative

Il concetto di funzione di trasferimento non è utile solamente per la soluzione delle equazioni differenziali che divengono semplici equazioni algebriche, ma anche per effettuare considerazioni sia qualitative che quantitative sulle componenti armoniche che conterrà l'uscita in base alle componenti armoniche possedute dall'ingresso.

Per illustrare tale ultimo concetto si consideri la funzione del tempo ed il modulo della corrispondente trasformata di Fourier mostrate in figura 2.5 (si tratta di una misura di temperatura effettuata tramite PT100 su di una piastra termostata). Se tale segnale viene iniettato in ingresso ad un sistema che possiede la funzione di trasferimento mostrata in figura 2.6, si ottiene il segnale in uscita di figura 2.7.

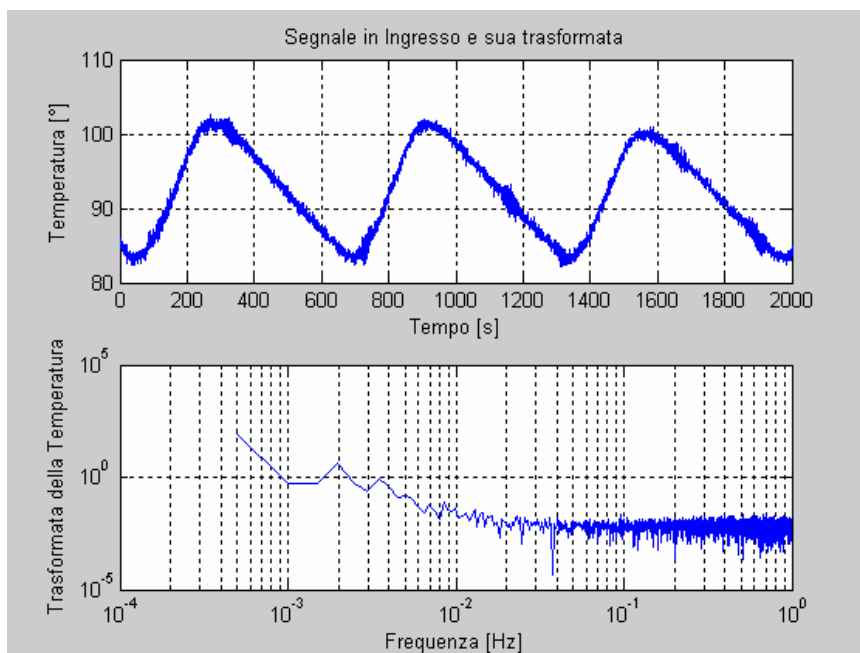


Fig. 2.5 Segnale di temperatura e sua trasformata rappresentata in modulo in scala logaritmica.

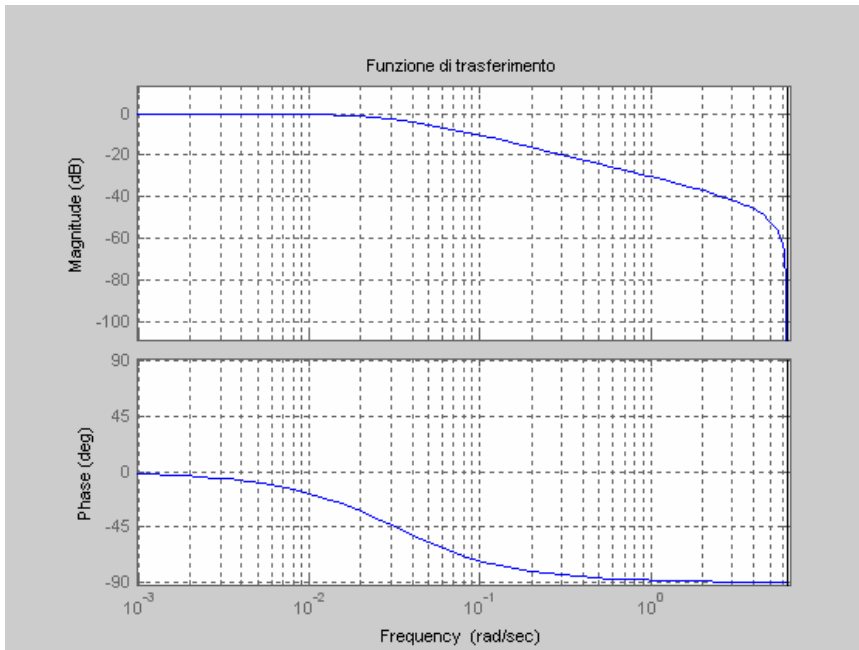
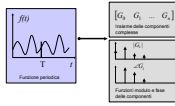


Fig. 2.6 Funzione di trasferimento del sistema nel cui ingresso viene iniettato il segnale di figura 2.5 in modulo e fase su scala logaritmica.

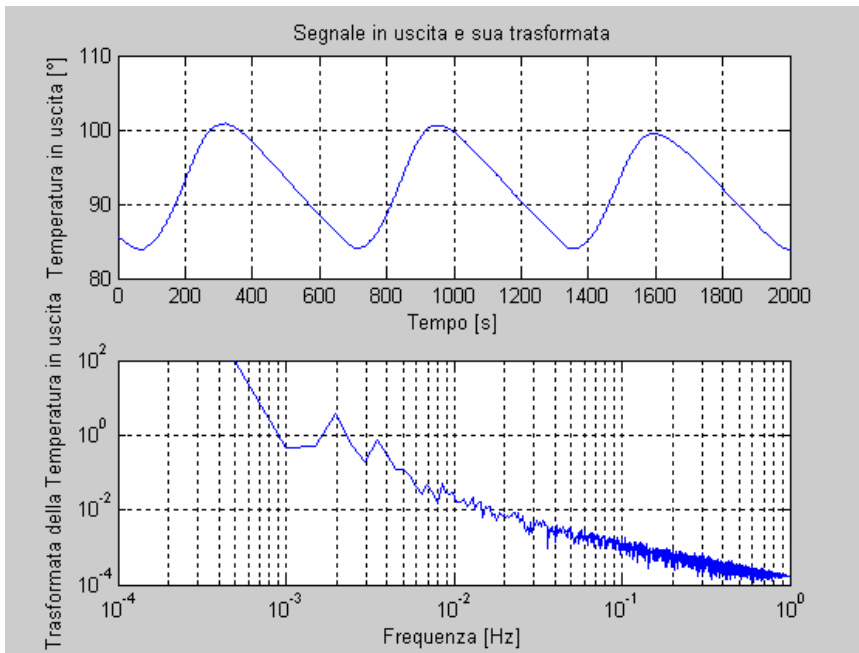
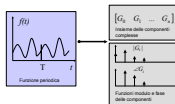


Fig. 2.7 Segnale di temperatura in uscita e sua trasformata rappresentata in modulo in scala logaritmica.

E' possibile notare che il segnale di uscita non possiede il rumore originario del segnale in ingresso in quanto la funzione di trasferimento del sistema ha attenuato le componenti armoniche ad alta frequenza che non appartenevano di sicuro ad un andamento di temperatura (la dinamica termica è generalmente 'lenta') bensì al rumore elettromagnetico di natura interferente.



3 Taratura dinamica

L'operazione di stima della funzione di trasferimento prende il nome di taratura dinamica. È l'operazione duale della taratura statica in cui viene stimata la relazione, di solito polinomiale, che lega il misurando con l'uscita dello strumento supposta in condizioni statiche. Nel caso statico tale relazione è una funzione che può essere lineare o non lineare. Nel caso dinamico è invece una equazione differenziale che, per dare vita ad una funzione di trasferimento, ovvero ad una relazione analitica funzione della frequenza, deve essere lineare. In tali condizioni infatti, l'equazione differenziale, mediante trasformazione di Fourier, diviene una relazione algebrica e quindi rappresentabile tramite funzione di trasferimento (§2.4). La funzione di trasferimento $H(\omega)$ è una funzione complessa della frequenza il cui modulo rappresenta come vengono amplificate od attenuate le varie componenti armoniche del segnale e la cui fase rappresenta come esse vengano sfasate. In definitiva, l'operazione di taratura dinamica di un sistema di misura ha come obiettivo quello di determinare una funzione complessa in modulo e fase ed i suoi parametri caratteristici.

In generale ci si trova di fronte a due casi:

1. non si conosce il modello matematico nè i parametri del sistema di misura;
2. il modello matematico è noto ma non i suoi parametri.

In generale, nel primo caso occorre determinare la funzione di trasferimento direttamente nel suo dominio, ovvero in frequenza in quanto nulla è noto a priori. Nel secondo, essendo noto il modello matematico, ovvero l'equazione differenziale che regola la relazione tra le funzioni di ingresso e di uscita, è possibile imporre ingressi semplici (anche detti canonici, ad esempio il gradino) di cui sia nota la funzione di uscita in maniera parametrica in modo da identificarne i parametri mediante tecniche nel dominio del tempo.

3.1 Tecniche nel dominio della frequenza

Si dividono in due famiglie:

- mediante ingressi armonici, la cui frequenza viene fatta variare nel campo di interesse, e misura simultanea di ingresso ed uscita;
- mediante l'impiego di un ingresso dotato di tutte le armoniche di interesse e calcolo del rapporto tra la trasformata dell'uscita e quella dell'ingresso. Di tale tecnica esistono due sottocasi: ingresso impulsivo ed ingresso casuale.

3.1.1 Mediante ingressi armonici variabili in frequenza

Nel paragrafo 2.5 abbiamo visto come l'uscita corrispondente ad un ingresso armonico sia anche essa armonica di ampiezza pari all'ampiezza dell'ingresso moltiplicata per il modulo della funzione di trasferimento calcolata in corrispondenza della frequenza dell'armonica stessa e sfasata rispetto all'ingresso di un angolo pari alla fase della funzione di trasferimento calcolata sempre in corrispondenza della frequenza dell'armonica.

Se l'ingresso è pari a $u(t) = \sin(\omega_0 t)$, l'uscita è $y(t) = M(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi(\omega_0))$ e la funzione di trasferimento in corrispondenza dell'armonica ω_0 è proprio $M(\omega_0) \cdot e^{i\Phi(\omega_0)}$. Facendo variare la pulsazione (o la frequenza) dell'armonica dell'ingresso è possibile costruire per punti la funzione di trasferimento in funzione della frequenza.

In figura 3.1 è rappresentata una schematizzazione del metodo in cui sono indicate le funzioni armoniche di ingresso ed uscita, le relative ampiezze ed i parametri temporali da misurare per rappresentare modulo e fase della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione dell'armonica imposta in ingresso.

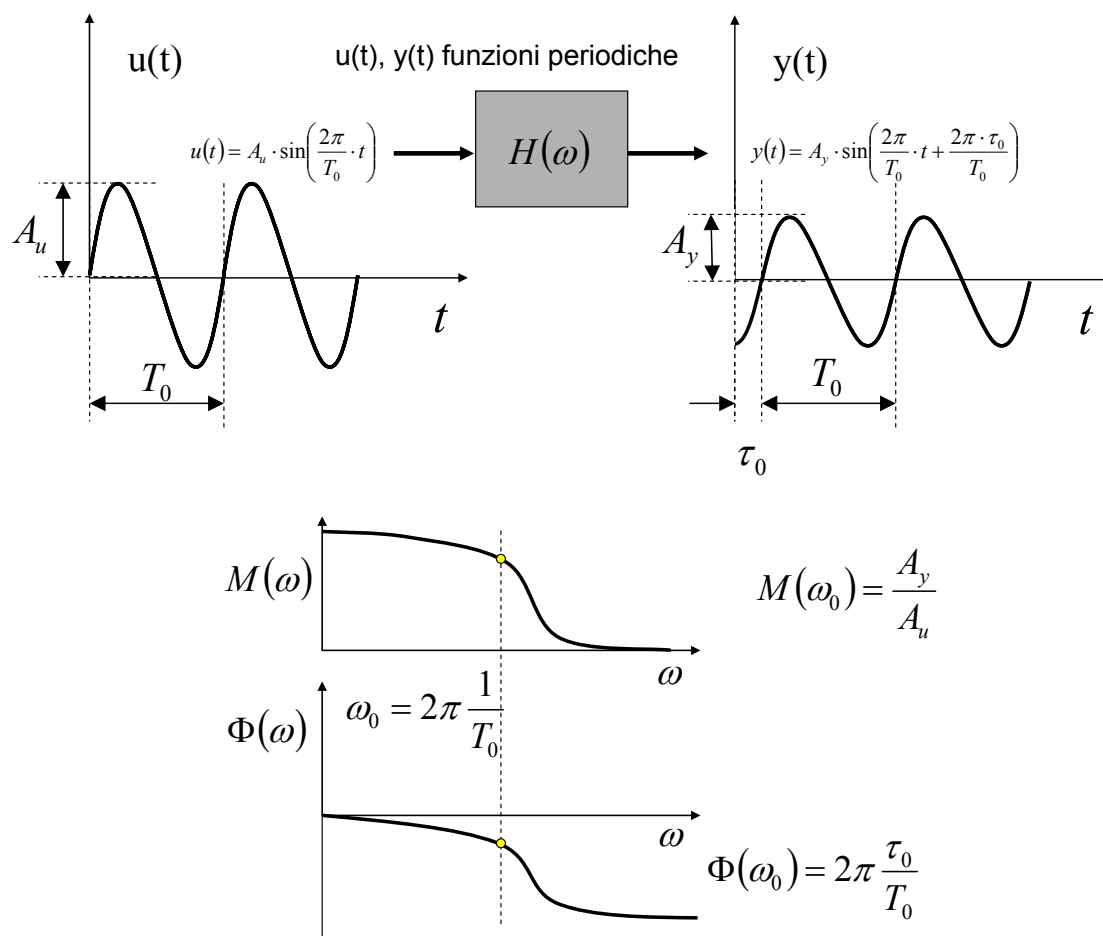


Fig. 3.1 Costruzione della funzione di trasferimento per punti mediante ingressi armonici puri.

Tale tecnica, concettualmente molto semplice, è praticabile solo quando la grandezza di ingresso, ovvero il misurando, è possibile generarlo sotto forma di una armonica pura. Tipicamente nel caso elettrico mediante generatori di funzione che producono segnali in tensione molto aderenti alla rappresentazione di una armonica pura. E nel caso meccanico mediante eccitatori elettrodinamici che producono moti armonici in spostamento, velocità ed accelerazione.

Esistono grandezze per le quali tale tecnica sarebbe di difficile impiego. Non esiste ad esempio un modo pratico ed accurato di generare una sinusoide in temperatura.

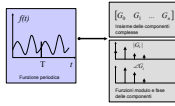
3.1.2 Mediante rapporto tra le trasformate

Un segnale impulsivo ideale possiede tutte le armoniche. Se calcoliamo infatti la trasformata dell'impulso rappresentato come delta di Dirac, avremo:

$$u(t) = \delta(t) \mapsto U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = 1 \quad \forall \omega$$

Ovvero la trasformata di un ingresso impulsivo ideale ha modulo unitario e fase nulla per tutte le frequenze. Risulta quindi essere particolarmente indicato per ricavare la funzione di trasferimento. Ricordando infatti quanto detto nel paragrafo 2.4:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)$$



E quindi in questo caso:

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

Ovvero risulta sufficiente imporre un ingresso impulsivo, registrare l'uscita $y(t)$ e calcolarne la trasformata secondo Fourier.

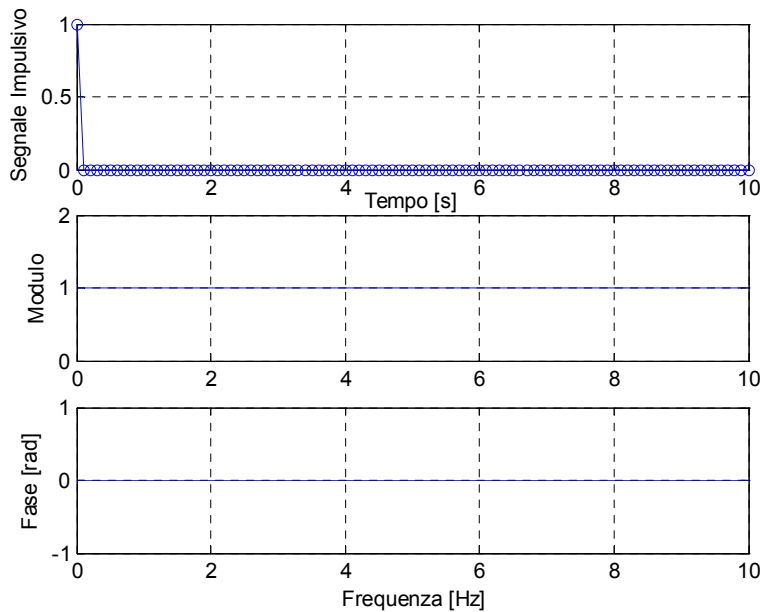


Fig. 3.2 Segnale impulsivo discreto in funzione del tempo, modulo e fase della sua trasformata in funzione della frequenza.

Proviamo a mescolare le fasi della trasformata dell'impulso assegnando valori casuali tra -2π e 2π invece del valore nullo come per l'impulso. Il risultato è sorprendente: da un segnale assolutamente 'ordinato' come può essere definito l'impulso, si ottiene un segnale assolutamente casuale che apparentemente non ha nulla in comune con quello originario. In realtà sappiamo che conserva la proprietà di avere modulo costante pari all'unità.

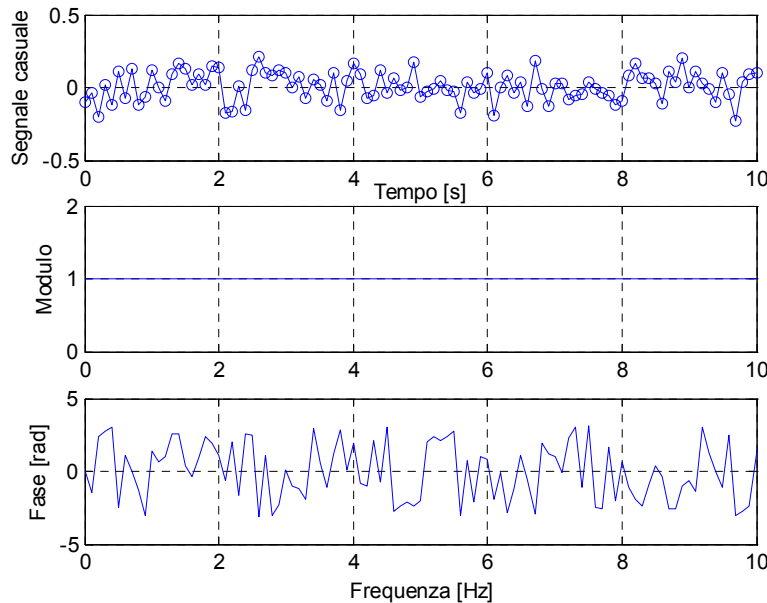
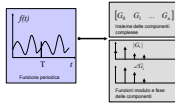


Fig. 3.3 Segnale casuale in funzione del tempo, modulo e fase della sua trasformata in funzione della frequenza.

Grazie al fatto che conserva la proprietà di avere modulo costante e pari all'unità, se $Y(\omega) = M_Y(\omega) \cdot e^{i\Phi_Y(\omega)}$, avremo:

$$Y(\omega) = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i\Phi_U(\omega)} = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot e^{i\Phi_U(\omega)} = M_H(\omega) \cdot e^{i(\Phi_H(\omega) + \Phi_U(\omega))}$$

e quindi

$$M_H(\omega) = M_Y(\omega)$$

Per ottenere la fase della funzione di trasferimento occorrerà ovviamente determinare la differenza di fase tra uscita ed ingresso.

È chiaro che segnali impulsivi o casuali potrebbero avere valori dei moduli diversi dall'unità, in tale caso basterà dividere per tale valore.

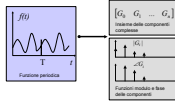
In altre parole, anche un segnale casuale che ha la capacità di variare tra un istante ed il successivo il proprio valore in maniera del tutto scorrelata con il precedente, possiede tutte le armoniche di ugual valore. L'andamento di un segnale casuale di questo tipo viene comunemente chiamato rumore bianco, analogamente alla luce bianca che possiede tutte le lunghezze d'onda del visibile in ugual misura.

Ad esempio nel caso meccanico è possibile applicare un ingresso di tipo impulsivo mediante un martello strumentato ed un ingresso di tipo casuale mediante un eccitatore elettrodinamico noto in termini anglosassoni come *shaker* comunemente impiegato per test di vibrazioni.

Anche in questo caso esistono grandezze per le quali tale tecnica sarebbe di difficile impiego. Non esiste ad esempio un modo pratico ed accurato di generare impulsi di portata fluidica.

Si potrebbe pensare di impiegare un segnale qualsiasi in ingresso e ricavare la funzione di trasferimento mediante la nota relazione:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$



Tale procedura è in linea di principio percorribile con il vincolo di non impiegare segnali che posseggano anche poche armoniche pressoché nulle nel campo di frequenza di interesse. Supponiamo infatti che la componente dell'ingresso per ω_b sia quasi pari a zero. Poiché nella fase di registrazione dei segnali sarà certamente sovrapposto qualche effetto interferente, moduli e fasi saranno affetti da un'incertezza non necessariamente proporzionale ai valori delle componenti stesse, per cui:

$$M_H(\omega_b) = \frac{M_Y(\omega_b) \pm \varepsilon_Y}{M_U(\omega_b) \pm \varepsilon_U} \approx \left| \frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_U} \right|$$

Ovvero, con elevata probabilità, il modulo della funzione di trasferimento in corrispondenza di ω_b verrebbe stimato in maniera totalmente errata. Questo vale anche per la fase anche se in tale caso si ha una relazione di sottrazione. Inoltre, se un'armonica ha ampiezza limitata, risulta molto difficile determinarne il valore sia del modulo che della fase.

3.2 Tecniche nel dominio del tempo

3.2.1 Mediante ingressi canonici e modello matematico

Per illustrare questo secondo caso impieghiamo un esempio. Consideriamo una sonda PT100 per la misura della temperatura (figura 3.4). Essa avrà una energia pari a $E = M \cdot c \cdot T$, mentre il flusso di calore tra la sonda e l'ambiente (un fluido) in cui essa viene immersa è pari a $P = \alpha \cdot A \cdot (T_F - T)$. Per M si intende la massa della sonda, per c il suo calore specifico, per T la temperatura della sonda, per T_F la temperatura del fluido, per α il coefficiente di scambio termico (convettivo o conduttivo che sia, considerato costante), per A l'area equivalente. Poiché il flusso di calore rappresenta l'energia trasmessa nell'unità di tempo, ovvero la potenza entrante nel sistema sonda (positivo quando la temperatura del fluido è maggiore), è immediato ricavare la relazione differenziale che esiste tra le variabili sopra indicate:

$$\frac{dE}{dt} = P$$

e quindi:

$$M \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = \alpha \cdot A \cdot (T_F - T).$$

Tale relazione differenziale lineare, mediante trasformazione secondo Fourier, diviene una relazione algebrica tra l'ingresso $T_F(\omega)$ che rappresenta il misurando e l'uscita $T(\omega)$ che rappresenta la variabile proporzionale all'uscita (proporzionale al valore della resistenza letta dalla centralina di condizionamento PT100 realizzata mediante ponte di Wheatstone o lettura a 4 fili):

$$H(\omega) \equiv \frac{T(\omega)}{T_F(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega \frac{Mc}{\alpha A}}$$

Effettuare la taratura dinamica vuol dire determinare il rapporto $\frac{Mc}{\alpha A}$ che ha le dimensioni di un

tempo e per questo viene indicato con il simbolo τ .

Si potrebbe procedere con un ingresso armonico, impulsivo o casuale, ma nel caso della variabile temperatura questo non è molto agevole. Si preferisce usare invece l'ingresso canonico gradino in cui la temperatura del fluido a contatto con la sonda passi improvvisamente da un valore T_I ad un valore T_F . Questa operazione è facilmente ottenibile prendendo la sonda dalla sua custodia a temperatura ambiente ed inserendola in un fluido (od in un alloggiamento di un corpo solido, ad esempio una piastra termostata) a temperatura diversa e costante. L'operazione di inserimento non sarà ovviamente istantanea ma sicuramente molto più veloce della risposta della sonda, per cui sarà possibile considerarla istantanea. Non lo sarebbe se considerassimo un fenomeno elettrico come ad esempio la capacità tra due corpi che ha tempi di risposta di gran lunga più veloci rispetto al fenomeno termico. Si suppone che il fluido a temperatura costante non venga perturbato dall'inserimento della sonda.

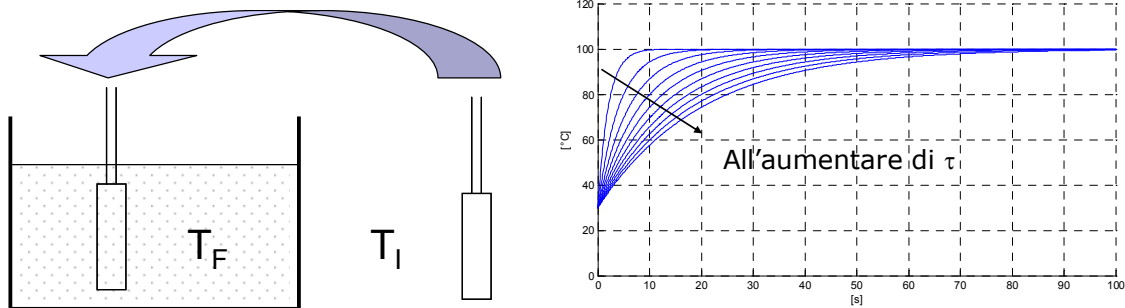


Fig. 3.4 ingresso a gradino 'termico': la sonda da temperatura ambiente $T_I = 30^\circ$ viene inserita all'interno di un fluido a temperatura $T_F = 100^\circ$. A destra la soluzione dell'equazione differenziale che risulta tanto più rapida quanto minore è la costante di tempo τ .

La soluzione dell'equazione differenziale è nota in forma chiusa per ingressi canonici:

$$T(t) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + T_F$$

Da questa è possibile ricavare il parametro τ della funzione di trasferimento mediante tre metodologie:

1. intercetta della costante di tempo sull'andamento esponenziale;
2. interpolazione lineare dopo linearizzazione mediante calcolo del logaritmo;
3. interpolazione mediante il modello stesso della soluzione.

Primo metodo:

manipolando la soluzione dell'equazione differenziale si ottiene:

$$T(\tau) = (T_I - T_F) \cdot e^{-1} + T_F$$

$$T_F - T(\tau) = (T_F - T_I) \cdot 0.368$$

Da cui è possibile ricavare la costante di tempo direttamente mediante intercetta sull'andamento esponenziale (figura 3.5).

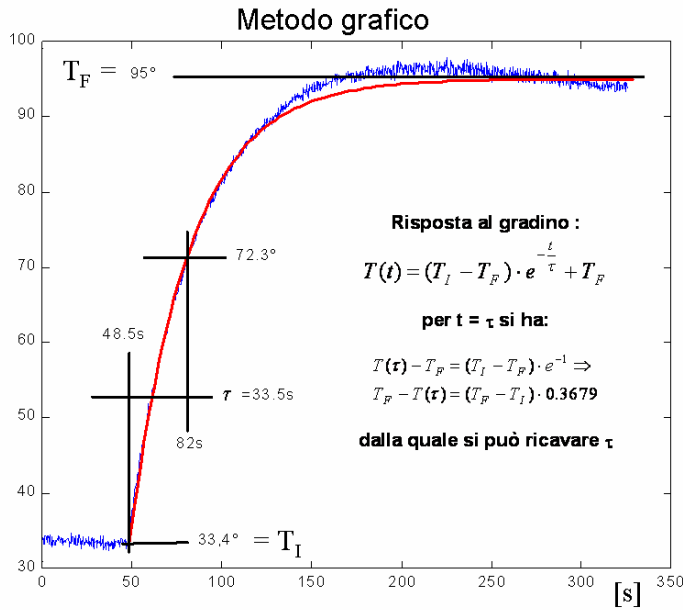


Fig. 3.5 Andamento sperimentale dell'uscita di una sonda PT100 inserita all'interno di una piastra termostata.

Secondo metodo:

È anche possibile linearizzare la soluzione dell'equazione differenziale in maniera molto semplice:

$$T(t) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + T_F \Rightarrow$$

$$\frac{T(t) - T_F}{T_I - T_F} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_F}{T_I - T_F}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Da questa ultima relazione, supponendo di aver campionato l'andamento temporale dell'uscita con frequenza f_c pari a $1/T_c$, si otterranno i seguenti dati sperimentali:

$$\ln\left(\frac{T(k \cdot T_c) - T_F}{T_I - T_F}\right) = -\frac{k \cdot T_c}{\tau} \quad \forall k = 0 \dots N$$

L'andamento segue quindi una retta con coefficiente angolare negativo pari a $-T_c/\tau$. Mediante interpolazione lineare con modello privo di coefficiente costante, è possibile ricavare l'inverso della costante di tempo.

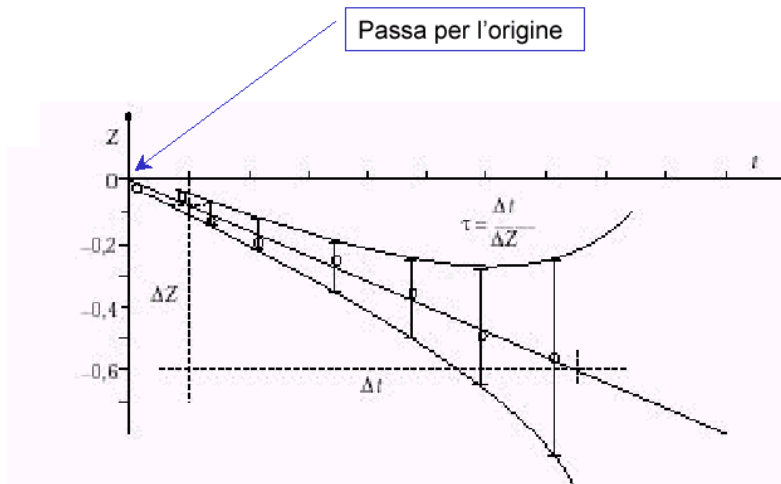


Fig. 3.6 Linearizzazione dell'andamento dell'uscita di una sonda PT100 inserita all'interno di una piastra termostata.

Terzo metodo:

mentre i due metodi appena discussi valgo evidentemente soltanto per sistemi del primo ordine è necessario avere a disposizione metodi più generali allorché il modello del sistema di misura sia di ordine maggiore.

Seguendo sempre lo stesso esempio, consideriamo di aver campionato l'andamento temporale dell'uscita con frequenza f_c pari a $1/T_c$, si otterranno, teoricamente, i seguenti dati sperimentali:

$$T(k \cdot T_c) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{k \cdot T_c}{\tau}} + T_F$$

Il primo termine a sinistra della relazione di uguaglianza rappresenta i dati sperimentali T_k^S campionati e quindi disponibili in forma digitale nella memoria del sistema di conversione ed acquisizione. Il secondo rappresenta l'andamento teorico in funzione del tempo. Poiché trattasi di una semplice funzione non lineare del tempo ad un solo parametro incognito τ , esso può essere determinato mediante operazione di interpolazione ai minimi quadrati analogamente a quanto visto per la taratura statica.

Operativamente, occorre minimizzare la somma dei residui al quadrato in funzione di τ :

$$\Phi(\tau) \equiv \sum_{k=0}^N \left(T_k^S - (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{k \cdot T_c}{\tau}} - T_F \right)^2$$

Nel caso di modelli matematici di ordine maggiore i parametri saranno più di uno quindi la minimizzazione sarà multivariabile. La procedura perfettamente analoga.

3.3 Considerazioni sulla relazione tra costante di tempo e funzione di trasferimento

Supponiamo di avere a disposizione una sonda PT100 per la quale risulta dalla operazione di taratura dinamica una costante di tempo pari a 10 s ed una sonda la cui costante è stata stimata 2 s. in figura 3.7 vengono riportati gli andamenti della risposta al gradino e della funzione di trasferimento in modulo e fase. Che relazione sussiste tra l'andamento temporale della risposta al gradino e l'andamento della funzione di trasferimento?

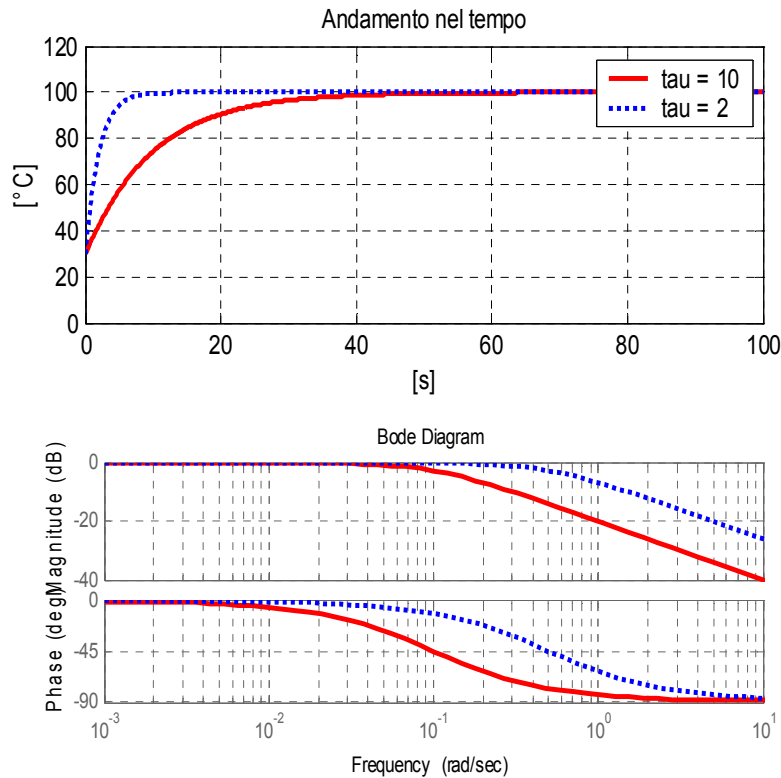
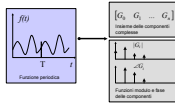


Fig. 3.7 Andamenti della risposta al gradino e della funzione di trasferimento in modulo e fase per due sonde PT100 di cui una con costante di tempo pari a 10 s e l'altra 2 s. Notare che gli andamenti della funzione di trasferimento sono riportati in scala logaritmica secondo la convenzione dei diagrammi di Bode, dunque 0 corrisponde ad 1 nel modulo per le basse frequenze.

Come visto nel § 3.2, quanto più τ è piccola tanto più rapida sarà la risposta dello strumento. In relazione alla funzione di trasferimento, quanto più τ è piccola tanto maggiore sarà $1/\tau$ che rappresenta la frequenza alla quale il modulo della funzione di trasferimento è pari a $1/\sqrt{2}$ ed oltre la quale il valore si attenua sempre più (rif. Tracciamento dei diagrammi di Bode).

In altri termini quanto più τ è piccola tanto più ampio sarà il campo di frequenze in cui la funzione di trasferimento ha modulo unitario. Poiché la funzione di trasferimento in modulo è pari al rapporto tra il modulo delle trasformata dell'uscita rispetto al modulo della trasformata dell'ingresso, quanto maggiore è tale campo di frequenze (**banda passante**) tanto maggiore è il numero di armoniche che vengono mantenute invariate nel passaggio tra ingresso ad uscita al sistema sonda di temperatura. In definitiva, facendo riferimento anche al § 2.1 ed alla figura 2.4, se l'uscita possiede un maggior numero di armoniche il suo andamento sarà dotato di variazioni più repentine, ovvero più rapido.

4 Filtraggio in frequenza

La scomposizione mediante la base di funzioni ortonormali appena vista può essere utilizzata allo scopo di separare due segnali sovrapposti. Avendo un segnale s pari alla somma di s_1 ed s_2 , una maniera di separare i due segnali, a patto che possiedano delle componenti armoniche diverse, è quella di applicare dei filtri. Le tipologie di filtri sono dette **passa-basso** nel caso in cui vengano mantenute le componenti a bassa frequenza ed eliminate quelle ad alta frequenza; **passa-alto** nel caso contrario; **passa-banda** nel caso in cui vengano lasciate immutate le componenti appartenenti ad una data frequenza ed eliminate le altre; **elimina-banda** nel caso opposto.

I parametri che definiscono le caratteristiche di un filtro possono essere espressi in termini di frequenza di taglio ed ordine del filtro. La frequenza di taglio è definita come quella frequenza in corrispondenza della quale la potenza dell'armonica corrispondente viene attenuata del 50%, ovvero l'ampiezza viene attenuata di un fattore uno su radice di due ovvero, in termini logaritmici, l'attenuazione è pari a -3dB . La frequenza di taglio per filtri digitali, ovvero filtri che elaborano sequenze di segnali campionati e convertiti viene solitamente normalizzata per la frequenza di Nyquist. L'ordine del filtro coincide con l'ordine del sistema lineare corrispondente al filtro e controlla, nel diagramma in frequenza, la pendenza della fase discendente del guadagno (espresso nel diagramma logaritmico in decibel per decade).

Altra maniera di esprimere i parametri di un filtro è quella di definire (ad esempio per un passa-basso) la frequenza di passaggio come quella frequenza fino alla quale le armoniche rimangono immutate, l'attenuazione in banda come quella attenuazione tollerabile all'interno della banda di interesse definita dalla frequenza di passaggio, la frequenza di stop come quella frequenza oltre la quale si è sicuri di aver attenuato di un fattore pari all'attenuazione le armoniche. Tale rappresentazione è più conveniente rispetto alla precedente poiché definisce direttamente la banda di interesse e la banda da eliminare.

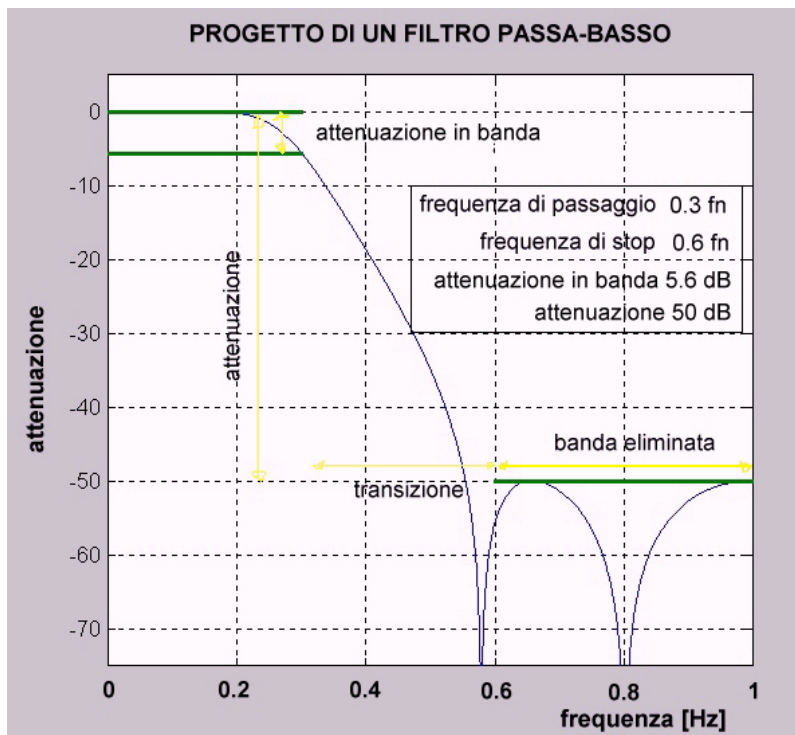
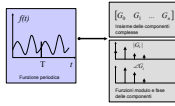


Fig. 1.2 Diagramma di un filtro passa-basso. In ascissa la frequenza normalizzata per il valore della frequenza di Nyquist ed in ordinata l'attenuazione. Sono indicati i parametri caratterizzanti la progettazione del filtro: la frequenza di passaggio che definisce l'insieme di frequenze al di sotto della quale non si ha attenuazione, l'attenuazione in banda che definisce la massima attenuazione tollerabile per le armoniche di interesse, la frequenza di stop che definisce da quale frequenza in poi le armoniche vengono attenuate di un fattore pari alla attenuazione del filtro.

Per comprendere l'utilizzo di un filtro seguiamo un esempio numerico in cui si ha un segnale risultato dalla sovrapposizione di tre armoniche:

$$x = \sin(2\pi t/80) + \sin(2\pi t/100) + \sin(2\pi t/10) \quad (9)$$

ovvero si ha la sovrapposizione della armonica avente periodo pari ad 80, quella di periodo 100 e quella di periodo 10. Considereremo la frequenza di campionamento pari all'unità. Una di queste tre armoniche potrebbe essere causata da un effetto non desiderato. Nel caso in cui l'armonica in questione fosse quella di periodo pari a 10 si impiega un filtro passa-basso dalla frequenza di taglio compresa tra



1/80 ed 1/10 ovvero 0.0125-0.1. La frequenza di campionamento è pari ad 1, da cui la frequenza di Nyquist risulta essere pari a 0.5. La frequenza di taglio deve dunque appartenere all'intervallo 0.025-0.2. Per convincersi di ciò in figura 1.2 sono mostrati il segnale di equazione 9 ed il corrispondente spettro. L'armonica di frequenza 0.2 corrisponde all'effetto da eliminare.

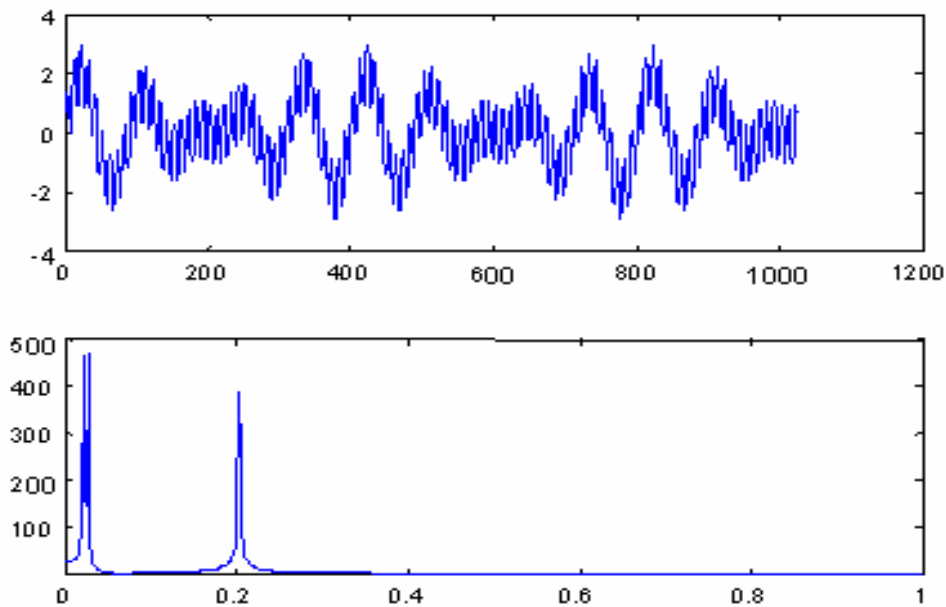


Fig. 1.3 Forma d'onda (in alto) e spettro dell'equazione 9.

Applicando un filtro con frequenza di passaggio pari a 0.1, frequenza di stop pari a 0.12, attenuazione di -60 dB ed attenuazione in banda pari a -3 dB (vedere figura 1.4), si ottiene la forma d'onda mostrata in figura 1.5. È chiaramente visibile l'eliminazione dell'armonica in alta frequenza.

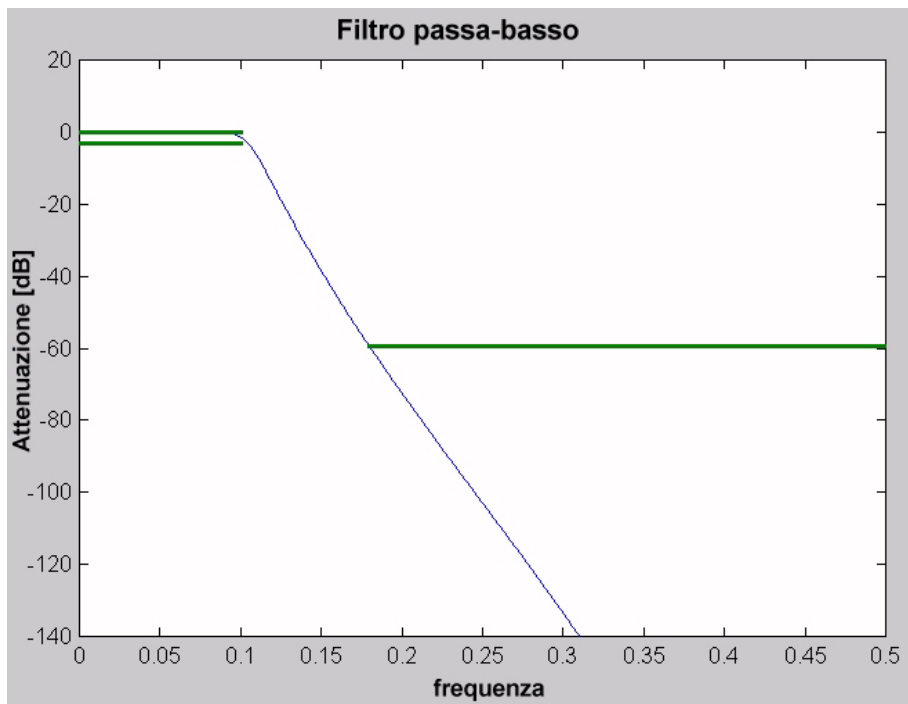


Fig. 1.4 Spettro in frequenza del filtro con frequenza di passaggio pari a 0.1, frequenza di stop pari a 0.12, attenuazione di -60 dB ed attenuazione in banda pari a -3 dB. Tale filtro, applicato alla forma d'onda di figura 1.3, genera il segnale mostrato in figura 1.5. È evidente l'effetto di epurazione dell'armonica di alta frequenza.

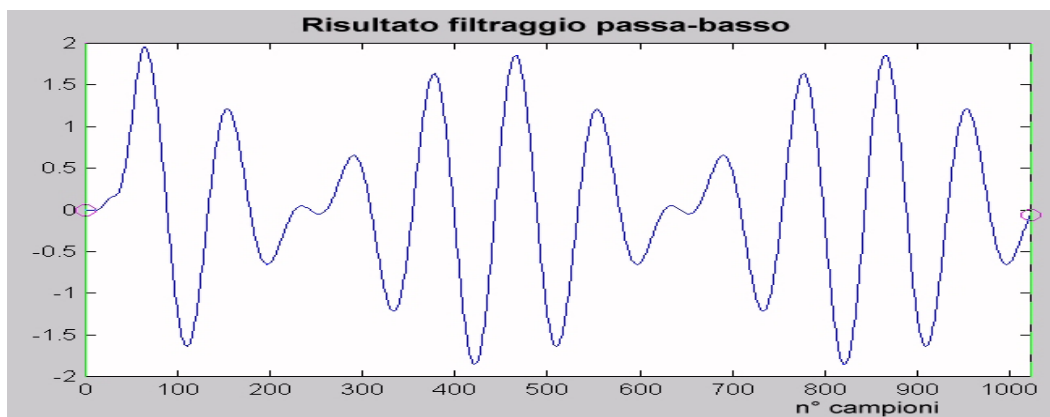
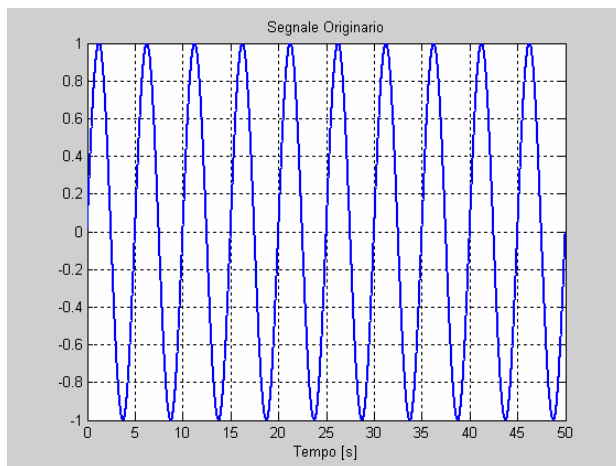
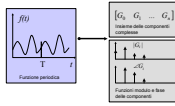
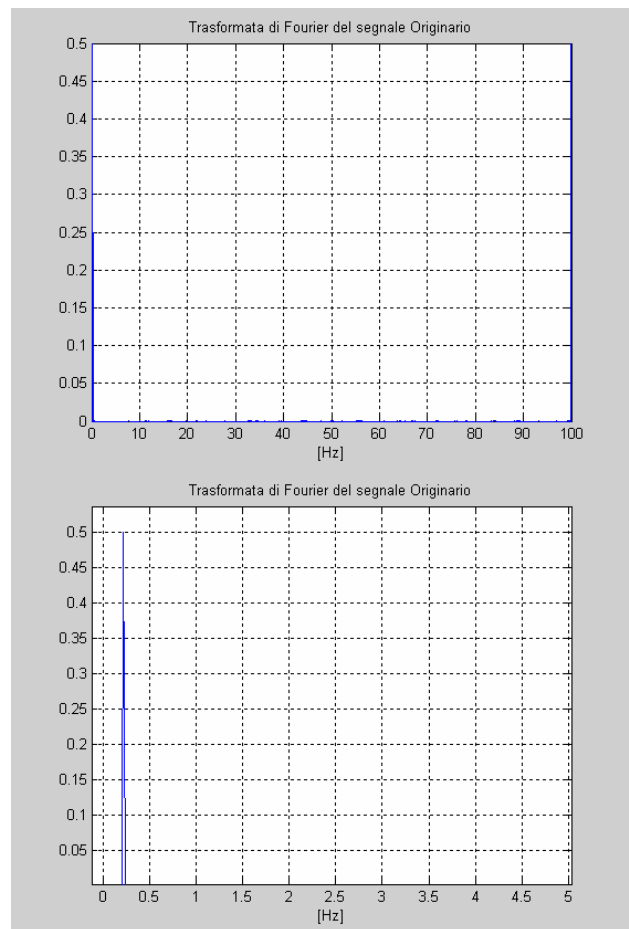


Fig. 1.5 Risultato dell'applicazione del filtro di figura 1.4 al segnale mostrato in figura 1.3.

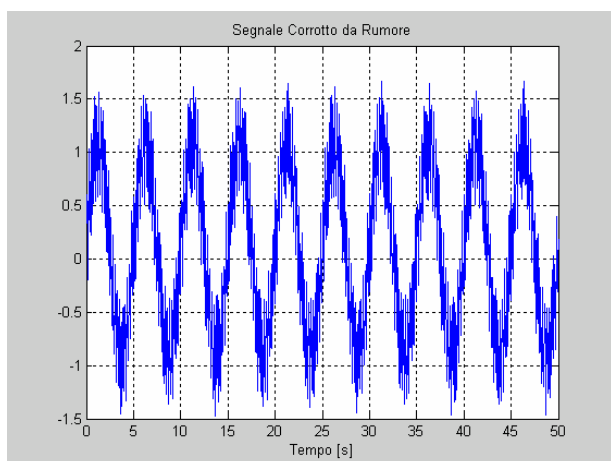
4.1 Filtraggio mediante manipolazione diretta della trasformata di Fourier



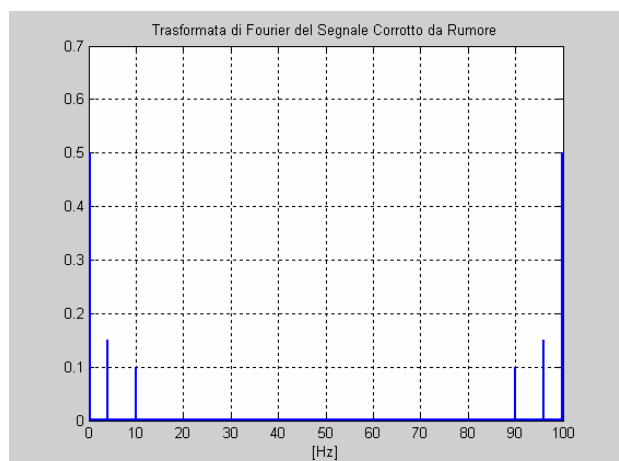
Segnale originario



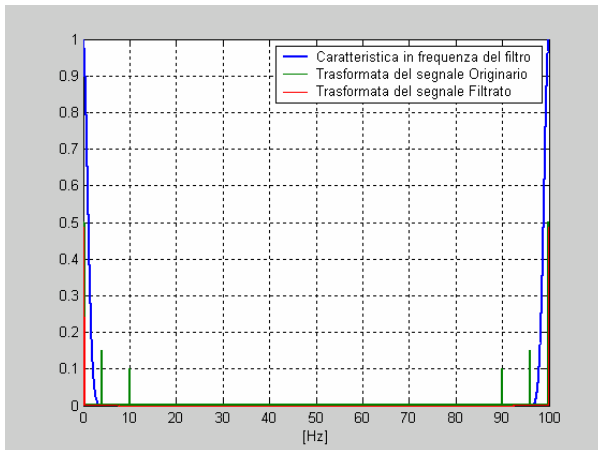
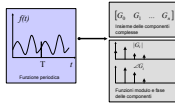
Spettro del segnale originario. Si noti la componente di periodo pari a 5 secondi e quindi frequenza di 0.2 Hz.



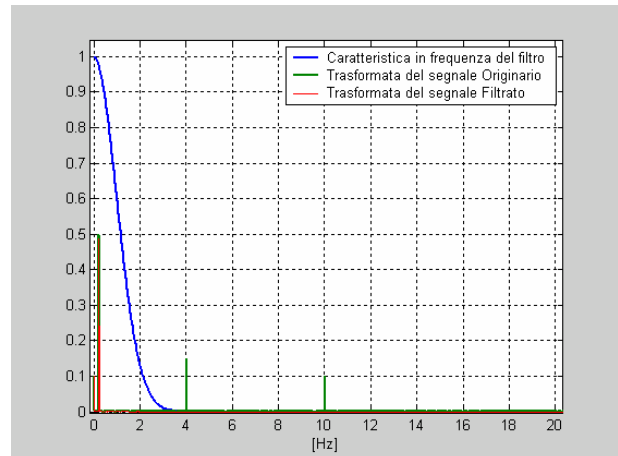
Segnale corrotto da rumore



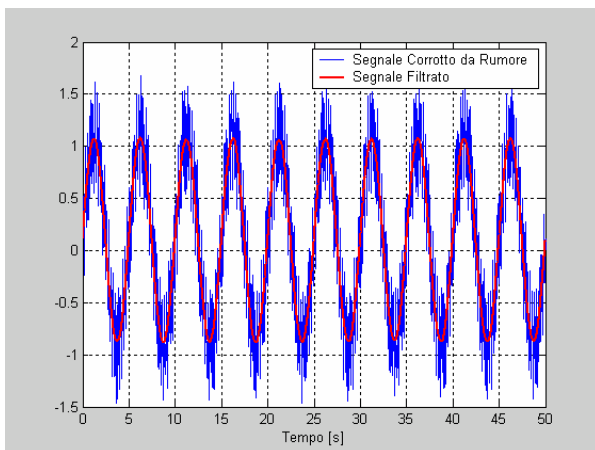
Spettro del Segnale corrotto da rumore



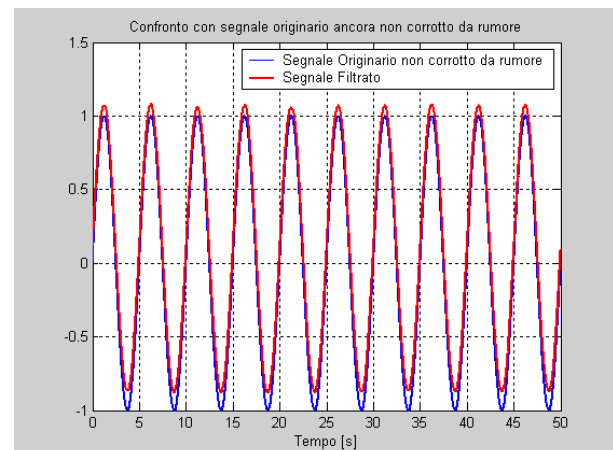
Filtro passa-basso adottato, spettro del segnale corrotto da rumore e spettro del segnale filtrato (risultato della semplice moltiplicazione dello spettro del segnale corrotto da rumore con il filtro)



Zoom sino a 20 Hz



Segnale corrotto da rumore e segnale filtrato



Confronto con segnale originario

Di seguito la funzione matlab impiegata per la redazione del presente paragrafo:

```

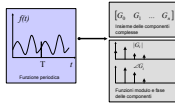
%
% Funzione che fornisce un filtraggio in frequenza operando direttamente sulla trasformata
%

close all

% GENERAZIONE DEL SEGNALE
t = 0.01:0.01:50;
ss = length(t);
s = sin(2*pi*t/5);
figure, plot(t,s), title('Segnale Originario'), xlabel('Tempo [s]'), grid on
% CALCOLO E RAPPRESENTAZIONE DELLA TRASFORMATA
sfft = fft(s);
f = ( 1:length(t) )/max(t);
figure, plot(f, abs(sfft)/ss ), grid on
title('Trasformata di Fourier del segnale Originario'), xlabel('[Hz]')

% AGGIUNTA DI RUMORE
s = s + 0.3*sin(2*pi*t/0.25) + 0.2*sin(2*pi*t/0.1) + 0.2*rand(size(t));
figure, plot(t,s), title('Segnale Corrotto da Rumore'), xlabel('Tempo [s]'), grid on
% CALCOLO E RAPPRESENTAZIONE DELLA TRASFORMATA

```



```

sfft = fft(s);
figure, plot(f, abs(sfft)/ss), grid on
title('Trasformata di Fourier del Segnale Corrotto da Rumore'), xlabel('[Hz]')

% COSTRUZIONE DEL FILTRO IN FREQUENZA
% Si costruisce la parte corrispondente alle frequenze positive:
filtro = exp(-0.5*f(1 : ceil(length(f)/2) + 1).^2); % Notare che è un vettore reale
% Si aggiunge la parte corrispondente alle frequenze negative (in coda e invertita)
% facendo attenzione al fatto che il primo campione deve corrispondere alla
% continua mentre l'ultimo alla prima componente negativa (ovvero la componente
% continua non si ripete nello spettro; a tale proposito si analizzi attentamente la
% figura della Trasformata di Fourier del segnale):
filtroNeg = flipr(filtro);
filtroNeg = filtroNeg(2:end-1);
filtro = [filtro filtroNeg];

sfft_F = sfft.*filtro;
figure, plot(f,filtro, f,abs(sfft)/ss, f,abs(sfft_F)/ss), xlabel('[Hz]'), grid on
legend('Caratteristica in frequenza del filtro', 'Trasformata del segnale Originario', 'Trasformata del segnale Filtrato')

s_F = ifft(sfft_F);
figure, plot(t,s, 'b', t,s_F, 'r'), grid on,
xlabel('Tempo [s]'), legend('Segnale Corrotto da Rumore', 'Segnale Filtrato')
figure, plot(imag(s_F)), title('Residui immaginari nella antitrasformata')

figure, plot(t,sin(2*pi*t/5), 'b', t,s_F, 'r'), title('Confronto con segnale originario ancora non corrotto da rumore'), grid on,
xlabel('Tempo [s]'), legend('Segnale Originario non corrotto da rumore', 'Segnale Filtrato')

```

5 Compensazione dinamica

In base a quanto visto nel paragrafo precedente si evince che, dato un sistema dinamico regolato da equazioni differenziali lineari, la caratteristica che determina in base alla forzante l'uscita è la funzione di trasferimento.

In un sistema di misura l'ingresso $u(t)$ viene inteso essere il misurando, mentre l'uscita corrisponde con il segnale che lo strumento fornisce in uscita. È proprio tramite la conoscenza della funzione di trasferimento che è possibile, avendo a disposizione l'uscita dello strumento, stimare l'andamento del misurando e quindi effettuare l'operazione di misura (anche conosciuta in questo caso come compensazione dinamica), oppure verificare che l'andamento dell'uscita riproduce con un sufficiente grado di accuratezza l'andamento dell'ingresso a meno di eventuali ritardi: tale condizione si verifica quando le armoniche dell'ingresso vengono tutte moltiplicate per lo stesso fattore di amplificazione (modulo della funzione di trasferimento) e sfasate in maniera trascurabile, oppure sfasate in maniera lineare con la pulsazione. La banda in frequenza in cui tale condizione si verifica viene definita banda passante.

Se le armoniche sono sfasate in maniera lineare con la pulsazione si ottiene infatti (eq. 13):

$$y(t) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi(\omega)) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot \omega) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot (t - k)) \quad \forall \omega$$

che non è altro se non un semplice ritardo. Nel caso in cui lo sfasamento non fosse lineare si avrebbe invece un rimescolamento delle armoniche che produrrebbe un effettiva distorsione del segnale.

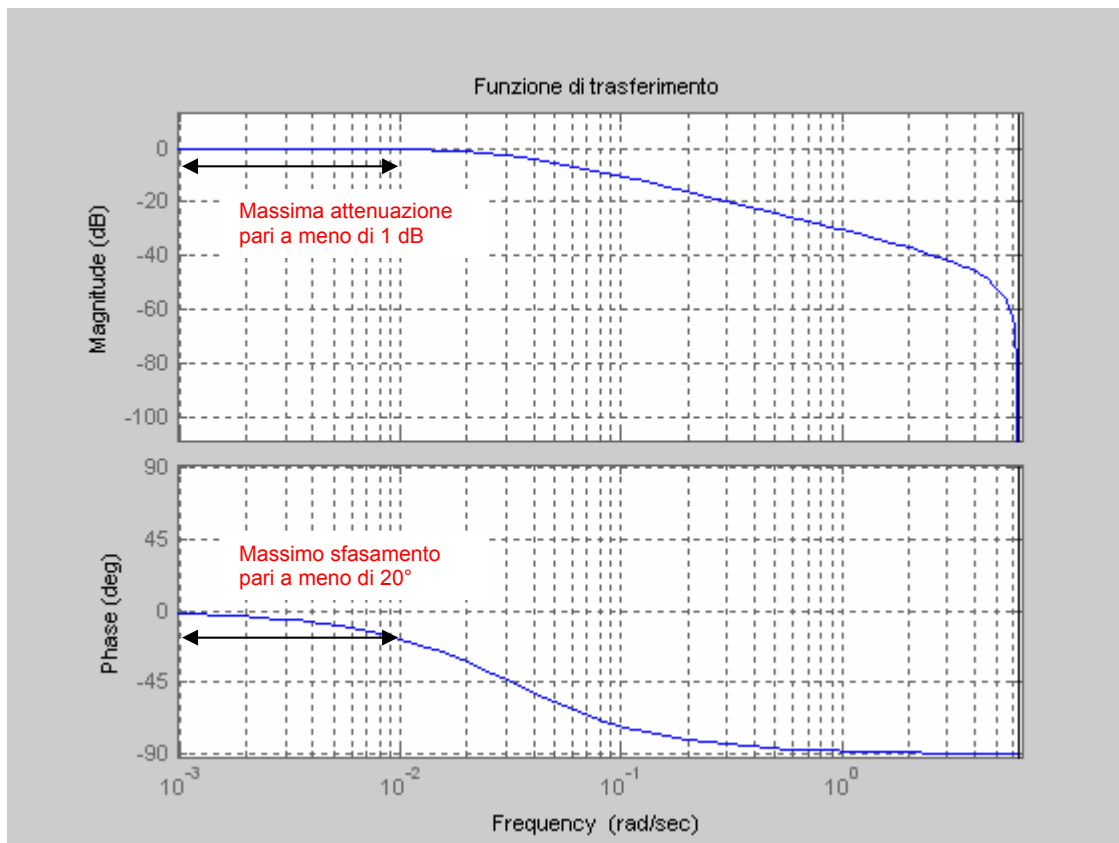


Fig. 3.1 Rappresentazione logaritmica della funzione di trasferimento di un sistema di misura con indicazione della banda in cui lo stesso non distorce le armoniche dell'ingresso e le sfasa in maniera trascurabile. Comunemente si indica la banda passante a 3 dB come quella regione di frequenza in cui la massima attenuazione rispetto a quella costante applicata dallo strumento nella banda utile è di 3 decibel.

Nelle regioni dello spettro in cui si ha una attenuazione rispetto alla zona della banda passante, è possibile comunque stimare il misurando avendo a disposizione l'uscita dello strumento a patto di compensare tale attenuazione delle armoniche interessate, e questo è possibile appunto conoscendo la funzione di trasferimento ed a patto che tale attenuazione sia limitata in quanto grosse attenuazioni (bassi moduli della funzione di trasferimento affetti quindi da una incertezza relativa elevata) darebbero vita a grossi fattori di compensazione (valori inversi della funzione di trasferimento affetti quindi da una incertezza relativa ancora più elevata) che, dato il loro tasso di incertezza, piuttosto che garantire una stima delle armoniche del misurando, provocherebbero una compensazione errata non garantendo l'operazione voluta. Per comprendere tale ultimo concetto si supponga di voler compensare una certa armonica fuori dalla banda passante, che risulta essere attenuata dallo strumento da un fattore pari a 0.001 ± 0.01 ovvero di un valore la cui incertezza è dieci volte maggiore il valore stesso (tale caso può essere molto frequente nelle regioni dello spettro ove il modulo della funzione di trasferimento è molto basso e quindi l'incertezza prevale sul valore originario. In tale caso il fattore di compensazione sarebbe pari a 1000 ± 10000 ovvero inutile e dannoso per la ricostruzione dell'armonica dell'ingresso.

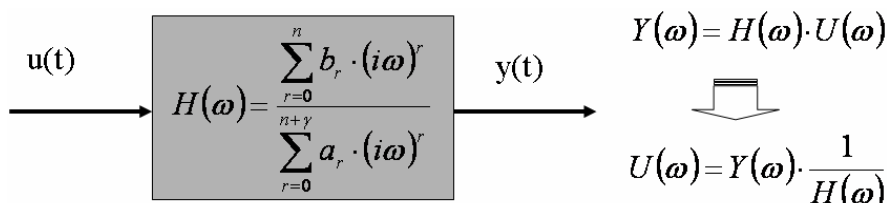
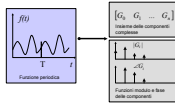


Fig. 3.2 Relazione funzionale tra l'ingresso allo strumento di misura (misurando $u(t)$) e la sua uscita $y(t)$.



Altro effetto da considerare allorché si considera l'operazione di compensazione dinamica è quello degli ingressi di disturbo di tipo interferente che possono essere schematizzati come mostrato in figura 3.3. Nel caso in cui l'effetto di tali ingressi interferenti sia importante ed abbia componenti in frequenza molto estese nello spettro, ovvero sino a frequenze molto elevate, l'operazione di compensazione dinamica rischia di amplificare il rumore piuttosto che ricostituire le armoniche originarie del misurando. Poiché tale situazione è comune nelle situazioni pratiche della misurazione, la compensazione dinamica viene effettuata in intervalli di frequenza limitati, ove il modulo della funzione di trasferimento è certamente noto con buona accuratezza e l'effetto degli ingressi interferenti è sicuramente minore dell'effetto delle componenti armoniche del segnale.

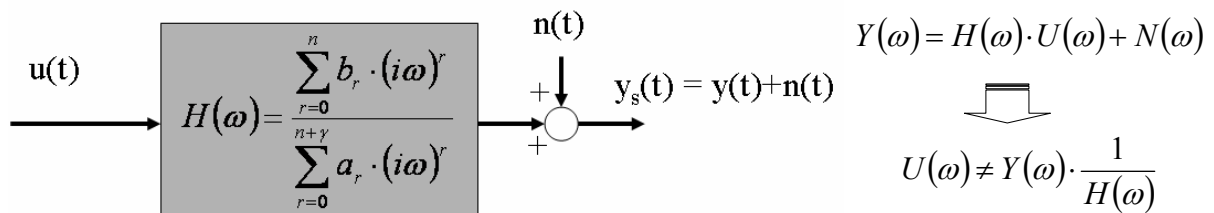


Fig. 3.3 Relazione funzionale tra l'ingresso allo strumento di misura (misurando $u(t)$) e la sua uscita $y(t)$ in presenza di effetto interferente (comunemente chiamato rumore).

Per meglio comprendere i concetti sopra esposti vediamo un esempio di misura della temperatura di una piastra termostata. I segnali necessari per illustrare l'esempio potrebbero essere 'reali' oppure 'simulati' numericamente. Nel secondo caso si ha il vantaggio di poter cambiare le condizioni senza dover impiegare realmente soluzioni fisiche diverse e quindi in maniera molto più agevole; scegliamo dunque questa seconda strada. In figura 3.4 è mostrata la simulazione ottenuta tramite simulink™ in cui si hanno in alto i blocchi necessari per la simulazione del controllo di temperatura ottenuto tramite termostato ed in basso i blocchi necessari alla simulazione del comportamento dinamico della PT100.

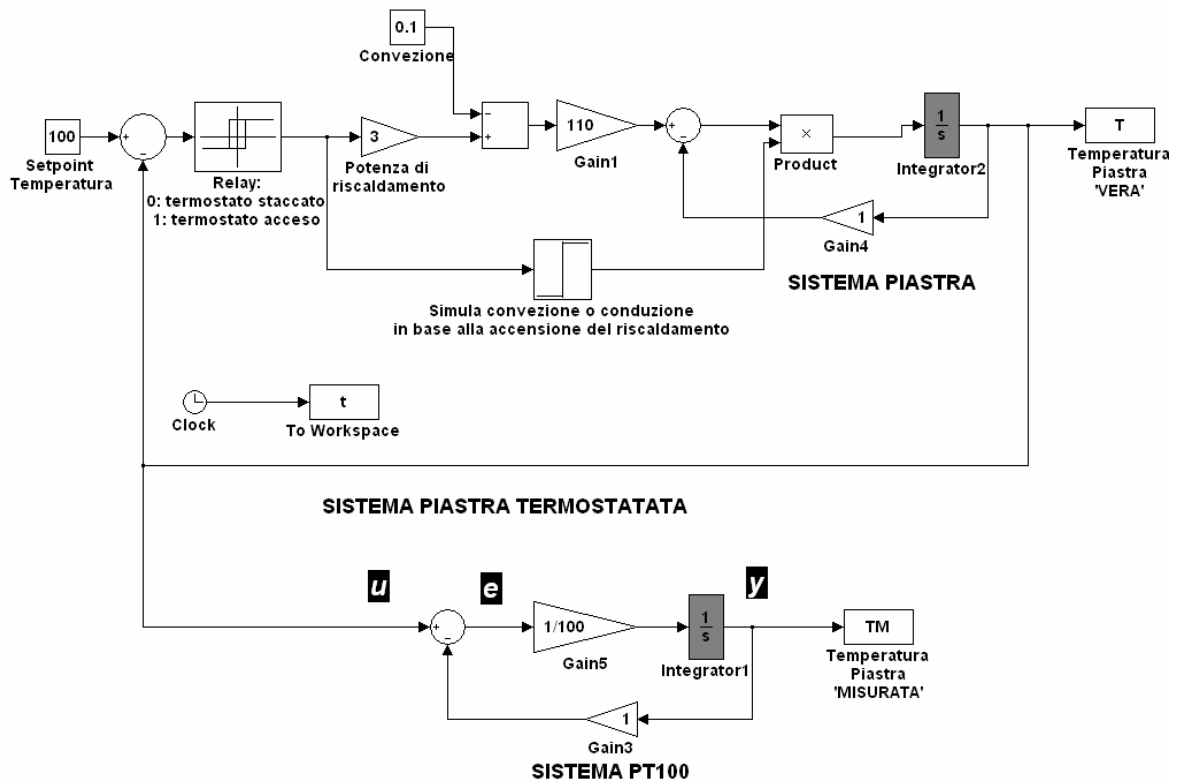


Fig. 3.4 Simulazione del controllo di temperatura di una piastra tramite termostato e relativa misura tramite PT100.

Il sistema PT100 è stato simulato mediante un sistema dinamico lineare del primo ordine. L'equazione di trasferimento la si ottiene direttamente dalla figura 3.4 considerando che:

$$\begin{cases} e = u - y \\ y = \frac{1}{100} \cdot \int_0^t e(\xi) \cdot d\xi \end{cases}$$

E quindi, sostituendo la prima equazione nella seconda:

$$y = \frac{1}{100} \cdot \int_0^t (u(\xi) - y(\xi)) \cdot d\xi$$

Da cui, derivando, si ottiene:

$$100 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = u(t)$$

Trasformando secondo Fourier:

$$(100 \cdot i\omega + 1) \cdot Y(\omega) = U(\omega)$$

Da cui è quindi possibile ricavare la funzione di trasferimento implementata nella simulazione di figura 3.4 riguardo la PT100:

$$H(\omega) \equiv \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1}{100 \cdot i\omega + 1}$$

È possibile notare che tale funzione si ricava considerando lo scambio termico tra la sonda e l'ambiente in cui è inserita e la sua capacità termica [1].

Eseguendo l'integrazione numerica sino a 2000 secondi si ottengono gli andamenti di figura 3.5.

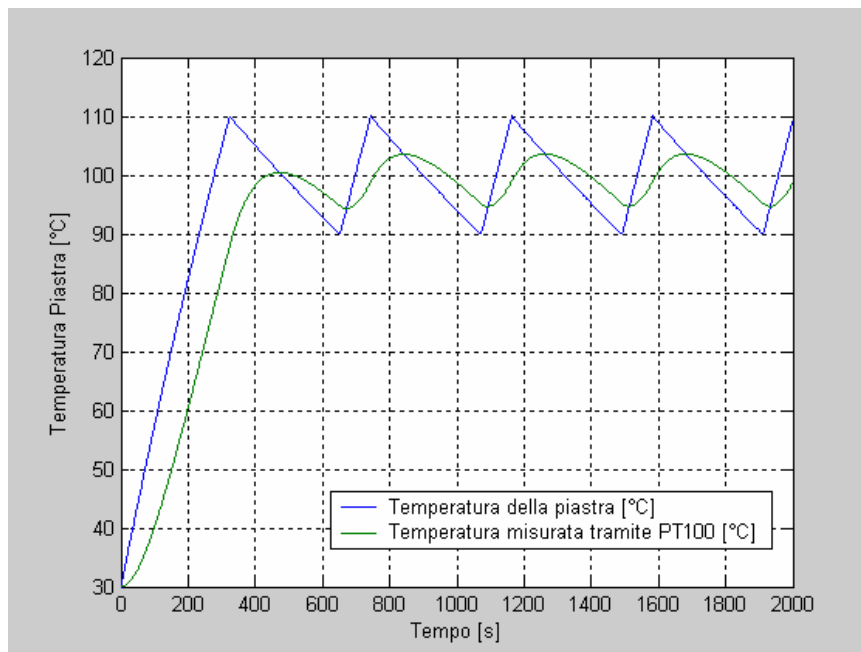


Fig. 3.5 Andamento dei segnali nella simulazione del controllo di temperatura di una piastra tramite termostato e relativa misura tramite PT100.

È possibile notare dalla figura 3.5 che l'andamento della temperatura in funzione del tempo viene misurato dalla PT100 riducendone l'ampiezza e ritardandolo. La motivazione di tale effetto (anche piuttosto accentuato) risiede nell'andamento della funzione di trasferimento della PT100 in funzione della frequenza. Per comprendere tale affermazione è sufficiente considerare attentamente i concetti illustrati nel §2.4 ed analizzare la figura 3.6 in cui è mostrato l'andamento del modulo della funzione di trasferimento della PT100 e dello spettro del misurando (l'andamento 'reale' della temperatura della piastra definito in figura 3.4 con la variabile T). Dalla figura sopra citata si nota come le armoniche del segnale che si evince dallo spettro avere un peso significativo nella descrizione del segnale arrivano sino ai 0.04 Hz mentre la funzione di trasferimento dello strumento di misura attenua in modo significativo le armoniche già dai 0.005 Hz. Tali considerazioni spiegano l'attenuazione della misura ottenuta con la PT100 ma non il ritardo che è possibile notare dalla figura 3.5. Per comprendere l'origine di tale ritardo è sufficiente analizzare la figura 3.7 in cui viene riportato l'andamento della fase della funzione di trasferimento della PT100 ed ancora il modulo dello spettro del misurando, in cui si nota come le armoniche significative siano sfasate in maniera non trascurabile. Il ritardo si spiega dunque considerando che uno sfasamento per una armonica corrisponde ad un ritardo della armonica stessa.

È importante notare che l'analisi che si basa sulla trasformata di Fourier è valida solamente in regime stazionario in quanto parte proprio dallo sviluppo in serie di Fourier poi portando al limite il periodo temporale. Dunque gli andamenti mostrati nelle figure 3.6 e 3.7 sono stati ottenuti applicando la trasformata di Fourier alla parte stazionaria dell'andamento della temperatura della piastra mostrato in figura 3.8. Si noti anche che il dominio temporale è stato limitato ad un numero finito di periodi ed il valore medio della temperatura è stato sottratto (si riconsideri quanto visto nel § 2.2).

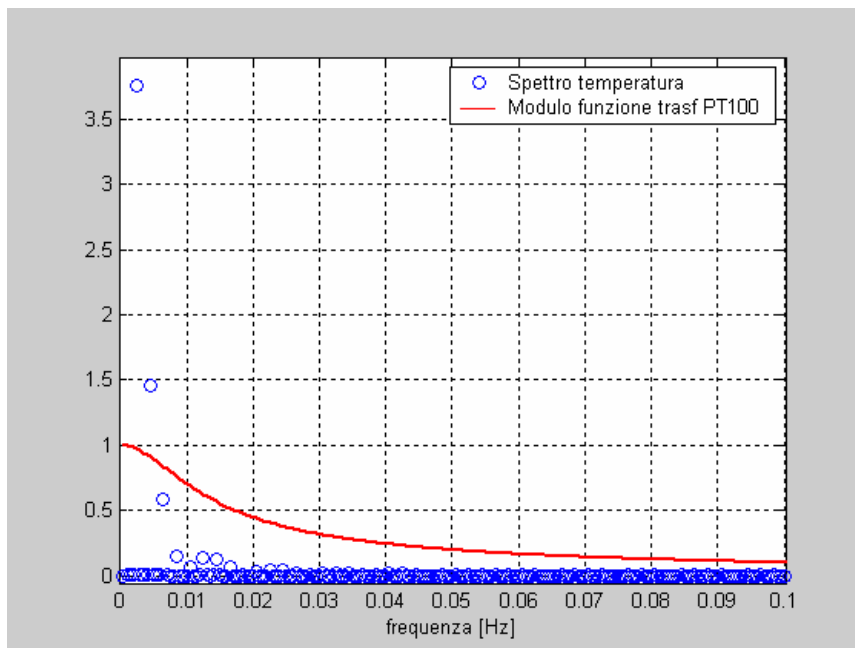


Fig. 3.6 Andamento del modulo della funzione di trasferimento della PT100 e dello spettro del misurando in funzione della frequenza, ovvero in funzione delle componenti armoniche.

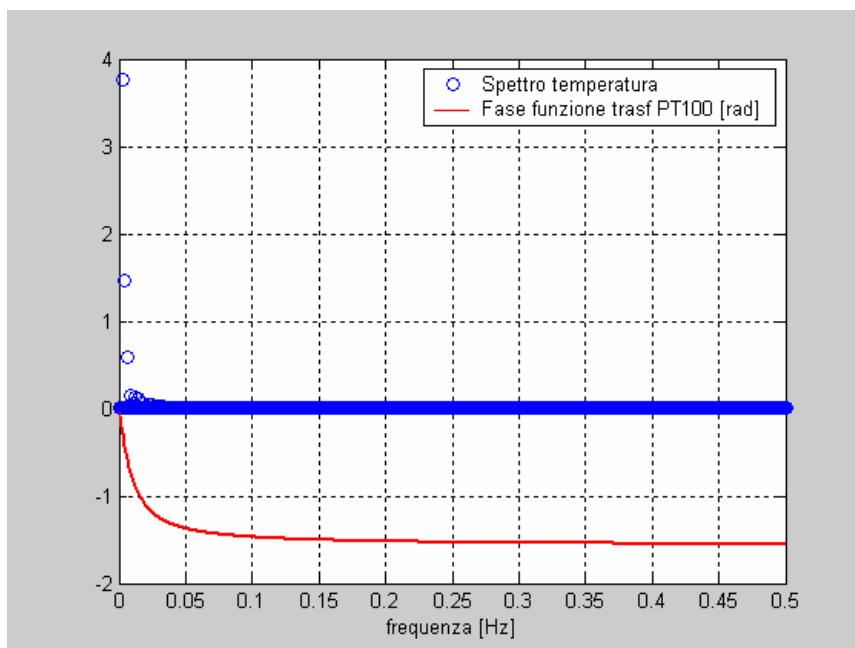


Fig. 3.7 Andamento della fase [rad] della funzione di trasferimento della PT100 e modulo dello spettro del misurando in funzione della frequenza.

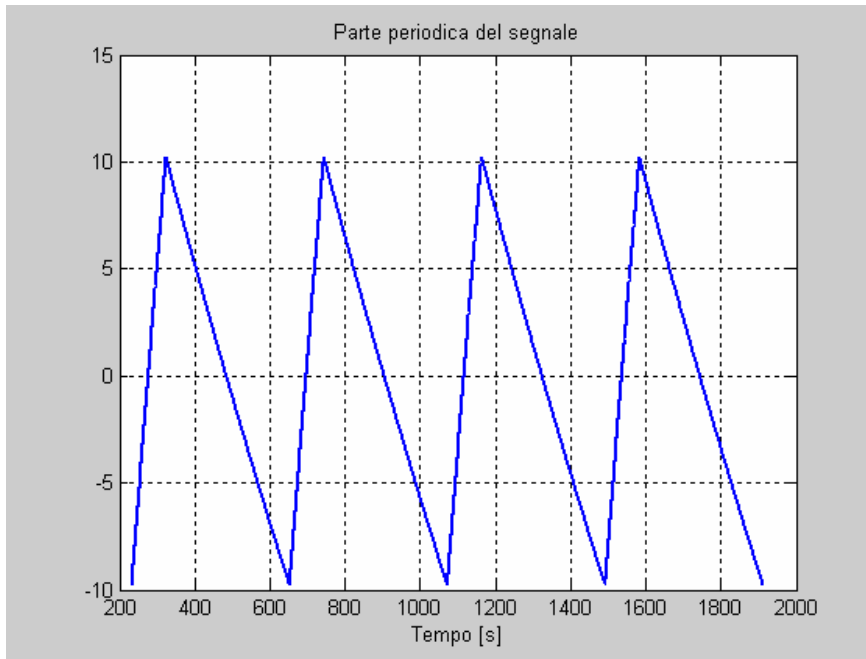


Fig. 3.8 Parte periodica del segnale della PT100.

In generale l'esempio analizzato sin qui non rappresenta un esempio di 'buona' misura in quanto si è impiegato uno strumento dalle caratteristiche dinamiche non sufficienti per misurare il fenomeno di interesse. Le possibili soluzioni sono 2:

1. impiegare uno strumento che ha una costante di tempo molto minore di 100 secondi;
2. effettuare una compensazione dinamica (nel caso in cui sia nota con buona accuratezza la funzione di trasferimento dello strumento ed il rumore interferente abbia un effetto molto lieve sulla misura).

Nel primo caso vediamo gli analoghi segnali di figura 3.5 nel caso in cui la costante di tempo sia pari a 10 secondi. Il risultato è mostrato in figura 3.9. La verifica del fatto che con uno strumento a costante di tempo minore e dunque più 'pronto' si abbia una ricostruzione più fedele del misurando si ottiene dalle figure 3.10 e 3.11, analoghe alle 3.6 e 3.7.

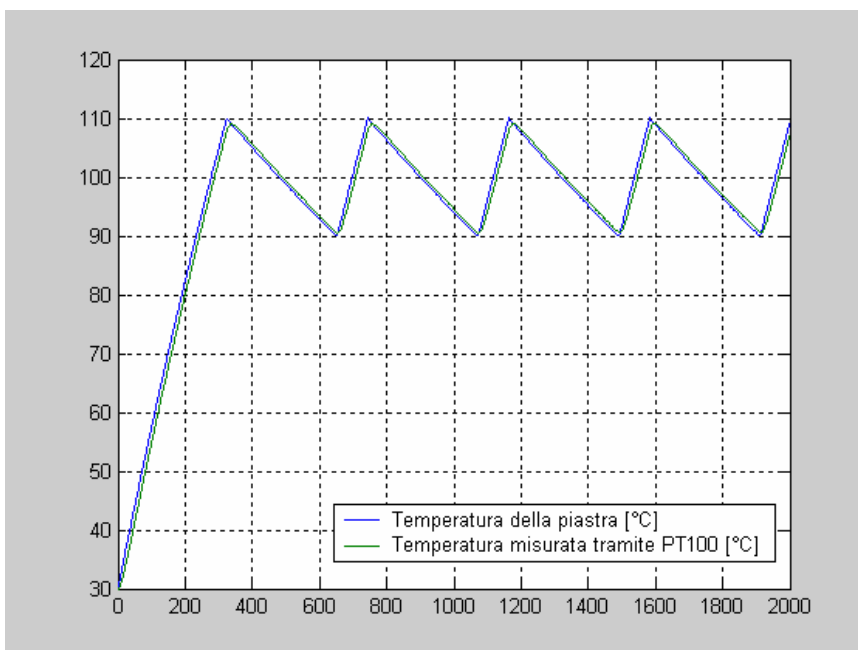


Fig. 3.9 Andamento dei segnali nella simulazione del controllo di temperatura di una piastra tramite termostato e relativa misura tramite PT100 (in questo caso la costante di tempo era stata imposta a 10 secondi).

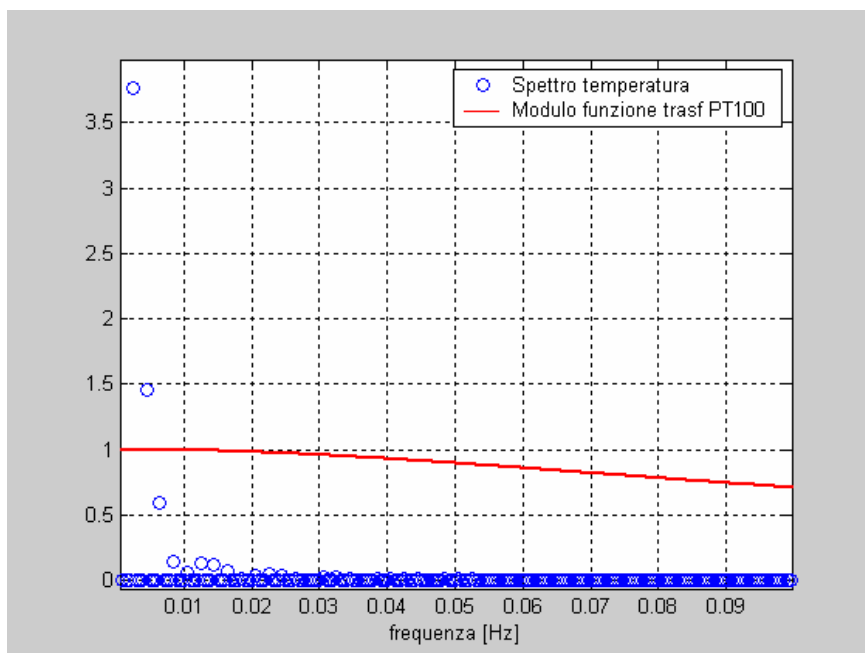


Fig. 3.10 Andamento del modulo della funzione di trasferimento della PT100 e dello spettro del misurando in funzione della frequenza (in questo caso la costante di tempo era stata imposta a 10 secondi).

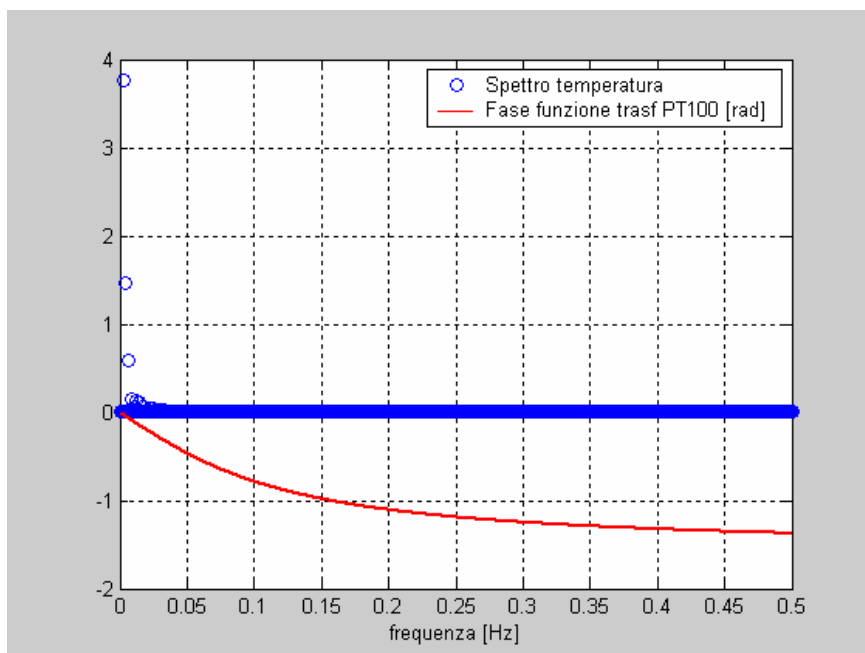


Fig. 3.11 Andamento della fase della funzione di trasferimento della PT100 e modulo dello spettro del misurando in funzione della frequenza (in questo caso la costante di tempo era stata imposta a 10 secondi).

Se la funzione di trasferimento del sistema di misura è nota con sufficiente accuratezza (nel caso di una simulazione numerica essa è nota con esattezza a meno di errori numerici di campionamento e troncamento) è possibile elaborare il risultato della misura (l'uscita del sistema PT100) mediante un sistema che ha funzione di trasferimento opposta a quella dello strumento di misura:

$$H'(\omega) \equiv \frac{Y'(\omega)}{U'(\omega)} = 100 \cdot i\omega + 1$$

da cui:

$$Y'(\omega) = 100 \cdot i\omega \cdot U'(\omega) + U'(\omega)$$

ed antitrasformando si ottiene:

$$y'(t) = 100 \cdot \frac{d}{dt} u'(t) + u'(t)$$

ovvero aggiungendo un sistema che in uscita ha il segnale di ingresso più 100 (pari alla costante di tempo) volte la derivata dell'ingresso si ottiene una migliore stima del misurando (compensata dinamicamente).

La simulazione con il sistema di compensazione è mostrata nella figura 3.12. Il risultato è mostrato nella figura successiva.

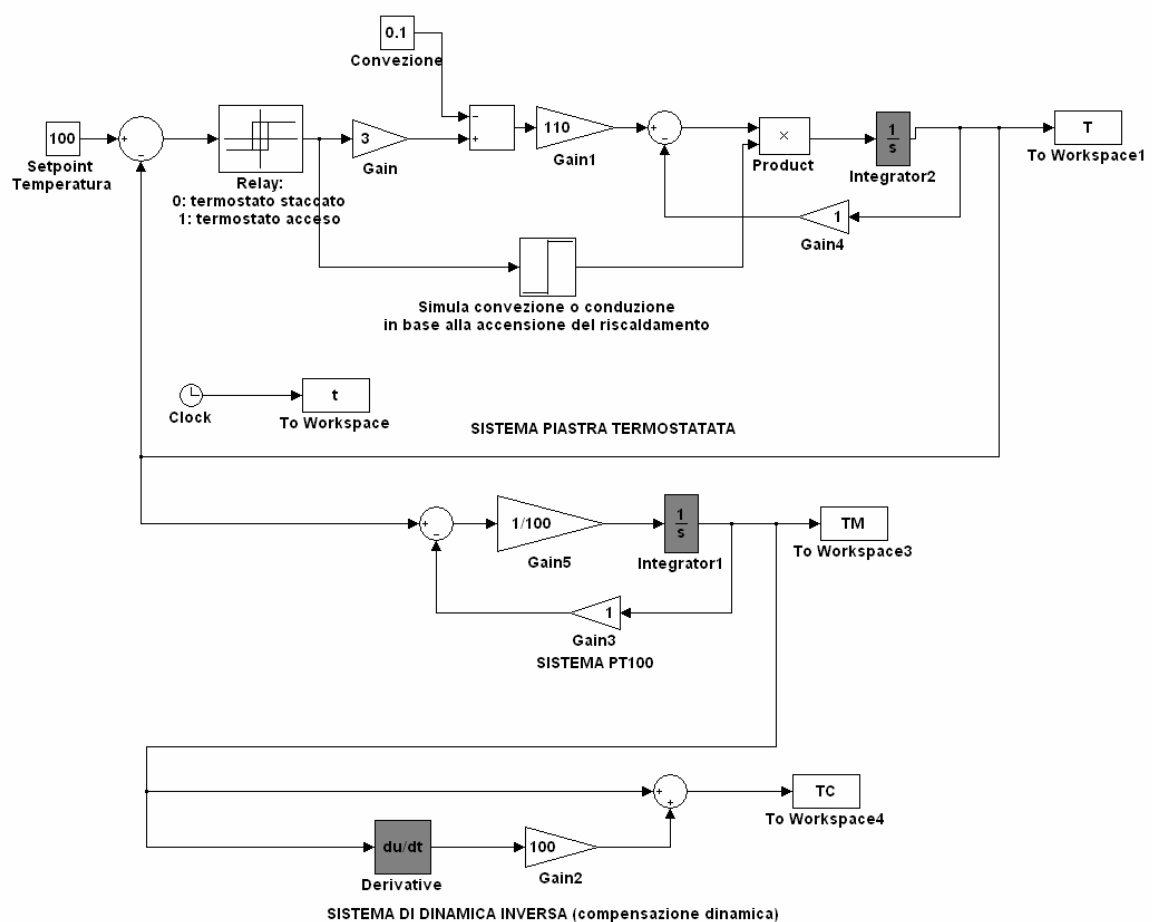


Fig. 3.12 Simulazione del controllo di temperatura di una piastra tramite termostato, della relativa misura tramite PT100 e relativa compensazione dinamica.

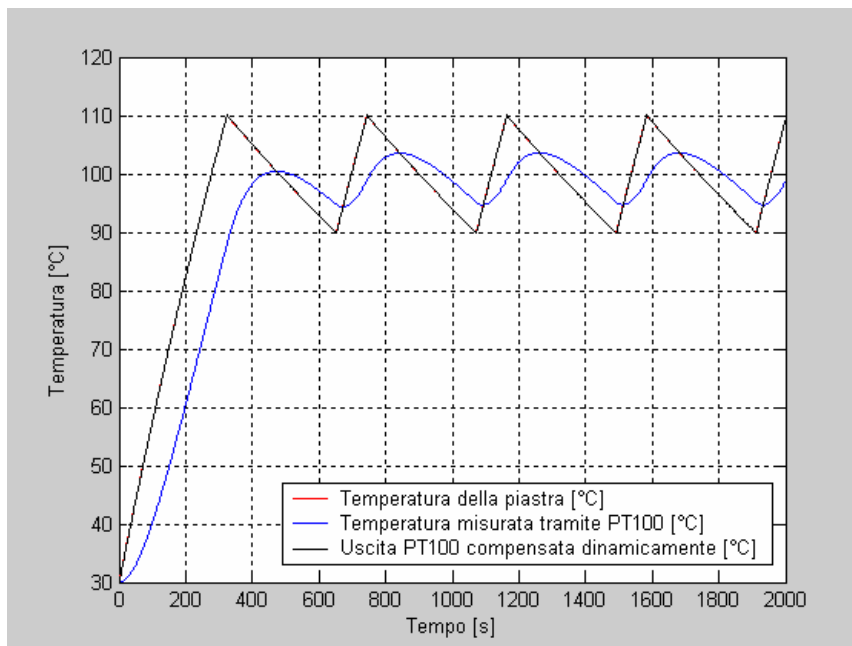


Fig. 3.13 Andamento dei segnali nella simulazione del controllo di temperatura di una piastra tramite termostato e relativa misura tramite PT100 (in questo è stata applicata la compensazione dinamica del segnale di figura 3.5).

Nella applicazione pratica esistono però delle problematiche che rendono la vita difficile alla compensazione dinamica: gli effetti interferenti casuali ed ad ampia dinamica. Tali effetti possono essere causati da interferenze elettromagnetiche, rumore termico, errori di quantizzazione nella conversione analogico-digitale, etc. tali effetti vengono definiti rumore, e, nel caso abbia componenti in frequenza molto ampie, ovvero su tutto il dominio delle frequenze di interesse, viene definito rumore bianco (dalla analogia acustica in cui un segnale avente ampiezza costante dello spettro in funzione delle armoniche genera un rumore privo di tonalità riconoscibili).

Il problema risiede nel fatto che, essendo un qualsiasi sistema reale passa-basso (ovvero sicuramente dopo una certa frequenza provoca una attenuazione), il suo opposto tenderà ad amplificare in maniera sempre maggiore le frequenze elevate. Poiché il rumore che è presente nelle applicazioni pratiche si avvicina spesso al rumore bianco, l'amplificazione delle componenti armoniche elevate provoca una ricostruzione del misurando in cui le componenti di rumore ad elevata frequenza sono notevolmente amplificate (ed il risultato sarebbe dunque diverso da quello mostrato in figura 3.13). Per risolvere tale problematica occorre preventivamente effettuare un filtraggio passa-basso sui dati acquisiti (vedere §4).

6 Determinazione funzioni di trasferimento mediante Parametri Concentrati ed Impedenze Generalizzate

Nel paragrafo 2.4 abbiamo visto come è possibile impiegare la trasformata per convertire una equazione differenziale in una equazione algebrica.

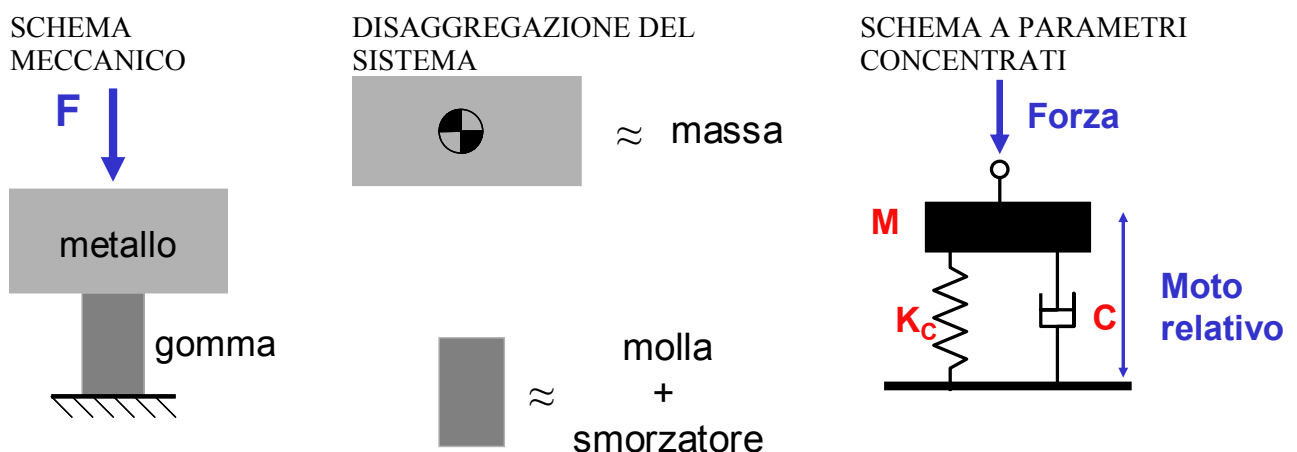
In questo paragrafo verranno mostrati i principi della modellazione di sistemi meccanici a parametri concentrati e la loro conversione in scemi alle impedenze generalizzate.

La modellazione a parametri concentrati consente di semplificare la modellazione di strutture meccaniche. L'impiego delle impedenze generalizzate utilizza la trasformata di Fourier e consente ulteriormente di:

1. evitare di impostare equazioni differenziali (grazie al fatto che si ragiona nel dominio della frequenza le relazioni differenziali verranno direttamente sostituite dalle corrispondenti relazioni algebriche);
2. determinare le funzioni di trasferimento mediante metodologie analoghe all'analisi dei circuiti elettrici (verranno determinate reti equivalenti mediante la connessione di elementi meccanici basilari: masse, molle e smorzatori).

6.1 Modellazione a parametri concentrati

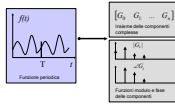
Nel caso di sistemi meccanici è possibile ragionare in termini di parametri distribuiti od in termini di parametri concentrati. Confrontando il primo rispetto al secondo caso si ottengono relazioni matematicamente molto più semplici ed intuitive trascurando gli effetti modali delle strutture. Allorquando infatti i fenomeni di interesse non siano connessi con le vibrazioni modali, è auspicabile una trattazione semplificata che riduce i teoricamente infiniti gradi di libertà del continuo (ogni punto di una struttura ha una velocità diversa rispetto a tutti gli altri punti) in un numero molto limitato in modo da poter trattare il problema mediante relazioni matematiche esplicite. Quando ciò non è lecito l'alternativa è quella di suddividere la struttura in un numero molto grande (ma comunque finito) di parti (ciascuno dotato di un grado di libertà g.d.l.) modellando il contatto mediante molle e smorzatori che tengono conto delle caratteristiche del materiale e quindi determinano le relazioni matematiche la cui soluzione viene determinata non più 'a mano', ma per via numerica tramite calcolatore impiegando i cosiddetti codici agli elementi finiti.



1: sistema meccanico costituito da una massa metallica appoggiata su di un supporto di gomma.

2: semplificazione del sistema. Il blocco metallico equivale ad una massa se si trascura la sua deformazione.

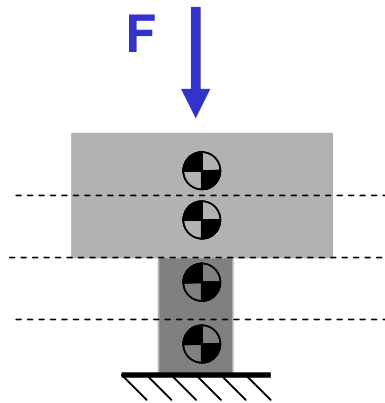
3: si considera il moto della massa rispetto alla base della struttura supponendo che tutti i punti si muovono verticalmente allo stesso modo: si semplificano tutti i gradi di



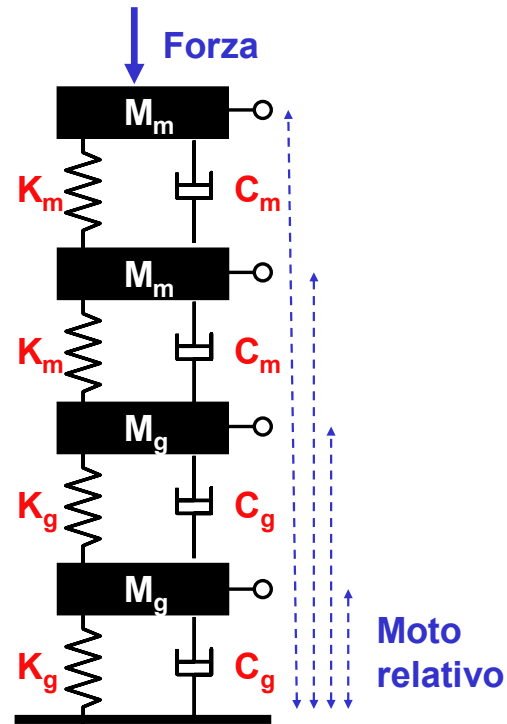
Si considera solamente il moto in direzione verticale.

Il supporto in gomma equivale ad una molla ed uno smorzatore se si trascura la sua massa (oppure la si accorpa al blocco metallico).

libertà del modello reale in un solo grado di libertà e si concentra la modellazione in soli tre parametri (che per questo si dicono concentrati) massa M , smorzatore C e molla K .



: parametro concentrato (tutti i punti della struttura da esso rappresentati posseggono la stessa velocità e fluisce la stessa forza)



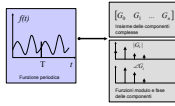
Invece che considerare i blocchi metallico e di gomma come unità autocontenute ed a se stanti, si considera che è possibile un moto relativo tra le facce del blocco metallico ed (analogamente) che il moto verticale della gomma può essere diverso nella parte superiore rispetto a quella inferiore.

Ogni g.d.l. corrisponde ad un nodo (od un terminale) che rappresenta una parte della struttura il cui moto viene considerato globalmente riferito ad un punto fisso (tipicamente l'origine di un sistema inerziale) ed il cui moto relativo è influenzato dai parametri rigidezza e smorzamento. Ad ogni nodo risulta essere solidale una massa di entità pari alla parte di struttura considerata muoversi assieme e corrispondente al relativo grado di libertà.

Il modello a 4 g.d.l. non è più significativo ne accurato, bensì sarebbe più corretto concludere che è semplicemente più complicato del modello ad un singolo grado di libertà. Per ottenere infatti un modello in grado di predire le vibrazioni strutturali occorre introdurre molti altri g.d.l. (in un modo analogo al passaggio da uno a quattro g.d.l.) e quindi richiedere l'assistenza del calcolatore e dei codici agli elementi finiti.

6.2 Le Impedenze Generalizzate

Il concetto dell'impedenza è molto usata nell'ambito delle reti elettriche in cui ogni elemento (resistenza, capacità, induttanza) corrisponde ad una impedenza che altro non è se non una relazione



algebraica nel dominio della frequenza che lega la trasformata della variabile di sforzo tensione alla trasformata della variabile di portata intensità di corrente elettrica. Il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata corrisponde alla potenza che fluisce attraverso il componente elettrico. La variabile di sforzo assume un valore che va sempre riferito tra due terminali (differenza di potenziale tra due punti diversi del circuito); la variabile di portata assume invece un valore che fluisce da un terminale all'altro attraverso l'elemento considerato (resistenza, capacità, ...). L'impedenza elettrica è il rapporto tra la trasformata della variabile di sforzo (tensione) e la trasformata della variabile di portata (corrente).

Nell'ambito meccanico esistono gli stessi componenti di base che permettono di definire e risolvere reti equivalenti alle impedenze generalizzate: massa, molla e smorzatore. La differenza sostanziale è che risulta essere tecnologicamente molto più difficile realizzare componenti di base meccanici che posseggono le proprietà di solamente un elemento costitutivo. Si pensi ad esempio di voler realizzare un elemento puramente smorzatore; si può realizzare un cilindro entro il quale scorre un pistone, non si riuscirà mai però a realizzare un elemento per il quale la massa sia realmente trascurabile. Tutto ciò vale anche per i componenti elettrici: una resistenza possiede sempre componenti capacitive ed induttive, in percentuali però molto più basse rispetto a quelle che si possono ottenere in ambito meccanico.

La conseguenza di quanto appena osservato è che nei sistemi meccanici coesistono le proprietà costitutive che vanno modellate a seconda dello scopo a cui l'analisi in corso mira. Tale fase è proprio la modellazione a parametri concentrati discussa nel paragrafo 6.1.

In altre parole non esistono fisicamente delle reti meccaniche come esistono reti elettriche, ma bisogna ricondursi ad esse identificando i gradi di libertà ed i parametri più significativi che entrano in gioco nel sistema e soprattutto in base alla analisi da effettuare: se si devono studiare effetti connessi con la propagazione delle vibrazioni di una struttura continua occorre prendere in considerazione molti gradi di libertà ed impiegare codici agli elementi finiti.

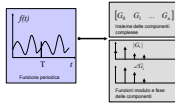
Parallelamente al caso elettrico esiste la variabile di sforzo velocità e la variabile di portata forza. Anche in questo caso il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata corrisponde alla potenza che fluisce attraverso il componente meccanico. La velocità è la variabile di sforzo in quanto il suo valore è sempre riferito tra due punti (se è assoluta si intende comunque riferita ad un sistema inerziale); la forza è una variabile di portata (e non di sforzo come suggerirebbe il suo nome) in quanto fluisce tra due punti o terminali ovvero si trasferisce da un nodo all'altro del sistema (si pensi all'equilibrio statico di una struttura caricata sulla sommità, le forze attraverso gli elementi strutturali definiscono il fluire della forza attraverso la struttura).

L'impedenza meccanica è il rapporto tra la trasformata della variabile di sforzo (velocità) e la trasformata della variabile di portata (forza).

Numerosi altri fenomeni fisici, purchè lineari, possono essere trattati mediante le reti di impedenze generalizzate: fenomeni meccanici rotativi, pneumatici, termici, etc. (si faccia riferimento alla tabella). Per ognuno di tali fenomeni è valido il vincolo che stabilisce che il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata costituisce la potenza in gioco.

La condizione di linearità per poter applicare le impedenze generalizzate è fondamentale in quanto l'impedenza è definita tramite trasformazione secondo Fourier. Sotto tale vincolo i fenomeni di non-linearità devono essere trascurati per cui ad esempio è possibile considerare l'attrito viscoso, ma è necessario trascurare l'attrito secco. Nel caso in cui tali fenomeni abbiano un peso tale da rendere prive di significato le considerazioni tratte mediante analisi alle impedenze generalizzate, occorre abbandonare l'approccio qui analizzato per l'impiego di codici di calcolo numerico. È chiaro che la sintesi e la comprensione ottenibile mediante la trasformazione e l'uso delle impedenze non sono prerogative delle soluzioni numeriche.

Fenomeno fisico	Variabile di sforzo	Variabile di portata	
Elettrico	Tensione	Corrente	
Meccanico	Velocità	Forza	
Meccanico rotazionale	Velocità angolare	Coppia	
Pneumatico	Differenza di pressione	Portata volumetrica	



Simbolo impedenza	Equazione differenziale	Relazione nel dominio delle trasformate	Impedenza generalizzata	NOTA
	$f = M \cdot \dot{v}$	$F(\omega) = M \cdot i\omega \cdot V(\omega)$	$Z_M(\omega) \equiv \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{i\omega \cdot M}$	Il moto di una massa è sempre riferito ad <u>un sistema inerziale</u>
	$f = C \cdot v$	$F(\omega) = C \cdot V(\omega)$	$Z_C(\omega) \equiv \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{C}$	Il moto di uno smorzatore è sempre riferito tra due estremi
	$f = K \cdot \int v$	$F(\omega) = K \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot V(\omega)$	$Z_K(\omega) \equiv \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{K}$	Il moto di una molla è sempre riferito tra due estremi

La differenza sostanziale tra le impedenze elettriche e le impedenze meccaniche è che, mentre per le prime la variabile di sforzo può essere sempre riferita a due terminali qualsiasi, per le seconde c'è il caso particolare della **massa il cui moto è sempre riferito ad un sistema inerziale**. Questo caso particolare va sempre tenuto a mente nel determinare le reti equivalenti ma, come si vedrà più avanti, consente di semplificare notevolmente il compito.

6.3 Procedura per la determinazione della rete equivalente

La procedura può essere sintetizzata nei seguenti passi:

1. Analisi schema meccanico
2. Determinazione dei gradi di libertà e dei parametri concentrati necessari a descrivere il fenomeno/sistema
3. Schema meccanico ai parametri concentrati
4. Schema impedenze generalizzate
5. risoluzione circuito per ricavare le funzioni di trasferimento cercate
6. tracciamento diagramma di Bode della funzione di trasferimento
7. (eventuale) compensazione dinamica

6.3.1 Esempio di semplice sistema per l'isolamento dalle vibrazioni

Si consideri un sistema meccanico costituito da una base metallica sottoposta a sollecitazione vibrazionale (ad esempio il sisma), uno strato di gomma ed un blocco di metallo che rappresenta lo strumento che si vuole disaccoppiare dalle vibrazioni. Nel caso in cui si voglia analizzare quali componenti armoniche del sisma vengono trasmesse allo strumento ma non interessa andare a considerare l'accoppiamento con i modi di vibrare dello stesso strumento, è possibile operare come di seguito illustrato.

Di seguito viene illustrata la procedura in tutti i suoi passaggi fondamentali.

Passo	Schema	Descrizione
1	<p>metallo gomma</p> <p>$F \uparrow$</p> <p>Base metallica molto sottile</p>	<p>Si consideri un sistema meccanico costituito da una base metallica molto sottile sottoposta a sollecitazione vibrazionale, uno strato di gomma ed un blocco di metallo (che rappresenta lo strumento che si vuole disaccoppiare dalle vibrazioni).</p>
2	<p>M_1</p> <p>K_1</p> <p>C_1</p> <p>$F \uparrow$</p> <p>⊗ : gradi di libertà (blocco metallico e base)</p>	<p>Nel sistema meccanico considerato è possibile trascurare le deformazioni delle parti metalliche (e quindi la relativa rigidità ed l'attrito) ed attribuire la possibilità di deformazione e quindi di moto relativo allo strato in gomma.</p> <p>I gradi di libertà da assegnare sono quindi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - moto della base (le cui parti si suppone abbiano lo stesso identico moto) - moto del blocco metallico (idem) <p>In questa ottica i parametri da considerare sono: massa del blocco metallico, rigidità ed attrito della gomma.</p> <p>Possono essere invece trascurati:</p> <ul style="list-style-type: none"> - massa della base - massa della gomma (oppure in parte cumularla con il blocco metallico) - deformabilità e smorzamento blocco metallico

3	<p>T : nodo inerziale (rif. fisso)</p>	<p>Viene quindi disegnato uno schema meccanico in cui si riconoscono i parametri concentrati <u>inerzia, molla e smorzatore</u> ed i <u>gradi di libertà che vengono sintetizzati nei due nodi A e B</u> il cui moto viene riferito ad un sistema inerziale per rappresentare il quale <u>si aggiunge un nodo terra T come riferimento.</u></p>
4		<p>Per ricavare lo schema alle impedenze generalizzate si parte dal disegnare i nodi corrispondenti ai gradi di libertà ed il riferimento inerziale terra.</p> <p>È utile disegnare a parte i parametri in gioco (massa, molla e smorzatore) e collocarli uno ad uno nei passaggi successivi.</p>
4		<p>Il moto di una massa è sempre riferito al sistema inerziale terra T per cui relativo parametro M viene disposto tra il nodo B (a cui sono considerate solidali tutte le sue parti) ed il nodo T.</p>
4		<p>Il moto dello smorzatore C è un moto relativo tra i due capi a cui è fisicamente connesso: A e B.</p>
4		<p>Il moto della molla K è un moto relativo tra i due capi a cui è fisicamente connesso: A e B.</p>
4		<p>Nello schema si deve avere cura affinché tutte le variabili di sforzo e portata siano rappresentate assieme ai parametri in gioco.</p>

5		
5		<p>A questo punto risulta agevole ricavare le relazioni in frequenza che sussistono tra le grandezze in gioco. Potrebbero essere analizzate ad esempio le relazioni:</p> $\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)}, \frac{V_{BT}(\omega)}{F(\omega)}, \frac{V_{AT}(\omega)}{F(\omega)}$
5	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \frac{1}{i\omega \cdot M} \frac{1}{\frac{1}{i\omega \cdot M} + \frac{1}{\frac{K}{i\omega} + C}}$	<p>Sfruttando la regola del partitore di variabile di sforzo (in analogia elettrica partitore di tensione), si ricava la relazione che sussiste tra la velocità imposta alla base (nodo A) e la velocità risultante sul sistema (nodo B) entrambe riferite ad un sistema inerziale.</p>
5	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{\frac{1}{i\omega \cdot M}}{\frac{1}{i\omega \cdot M} + \frac{1}{\frac{K}{i\omega} + C}} = \frac{\frac{K}{i\omega} + C}{\frac{K}{i\omega} + C + i\omega \cdot M}$	
5	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{\frac{K}{i\omega} + C}{\frac{K}{i\omega} + C + i\omega \cdot M} = \frac{K + i\omega \cdot C}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot M}$	
5	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{K + i\omega \cdot C}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot M} = \frac{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K}}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + \left(\frac{i\omega}{\sqrt{M}}\right)^2}$	
6		<p>Mediante i comandi matlab seguenti si traccia il diagramma della funzione di trasferimento $\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)}$:</p> <pre>M = 10, K = 1000, C = 50 H = tf([C/K 1],[M/K C/K 1]) bode(H), grid</pre> <p>Dal diagramma risulta evidente come le armoniche a bassa frequenza passano inalterate, quelle ad alta vengono attenuate e dunque la propensione del sistema all'isolamento delle vibrazioni. È anche chiaro che occorre progettare il sistema in maniera da ridurre la risonanza.</p>

6.3.2 Esempio a tre gradi di libertà

Passo	Schema	Descrizione
1	<p>metallo gomma metallo gomma</p> <p>$F \uparrow$ Base metallica molto sottile</p>	
2	<p>M_2, M_1, K_2, C_2, K_1, C_1, $F \uparrow$</p> <p>⊙ : gradi di libertà (due blocchi metallici e base)</p>	
3	<p>C, B, A, T, M_2, M_1, K_2, C_2, K_1, C_1, $F \uparrow$</p> <p>T : nodo inerziale (rif. fisso)</p>	

4		
4		
4		
4		
4		
4		

6.3.3 Esempio di accoppiamento motore-carico

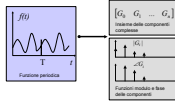
Di seguito viene illustrata la procedura in tutti i suoi passaggi fondamentali.

Passo	Schema	Descrizione
-------	--------	-------------

<p>1</p>	<p>Riferimento fisso o inerziale (ipotizzato // coincidente con la struttura portante)</p>	<p>Si abbia un sistema costituito da un motore con encoder che pilota un carico a cui è montato un secondo encoder.</p> <p>In figura sono rappresentati solamente gli elementi rotanti:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rotore del motore - carico rotante - alberi di trasmissione - cuscinetti (in cui sono indicati gli estremi connessi con le parti rotanti e quelli connessi con la terra ovvero il sistema inerziale)
<p>2</p>	<p>● : gradi di libertà (motore e carico)</p>	<p>In un sistema motore-carico uno dei fenomeni da tenere in considerazione è l'oscillazione torsionale dell'albero motore che risulta essere sottoposto spesso a notevole sforzo e quindi si deforma dando vita a fenomeni di risonanza.</p> <p>I gradi di libertà da assegnare sono quindi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - moto del rotore (tutte le parti solidali con rotore ed encoder motore si suppone abbiano lo stesso identico moto) - moto del carico (tutte le parti solidali con carico ed encoder carico si suppone abbiano lo stesso identico moto) <p>In questa ottica i parametri da considerare sono: inerzia del motore e del carico, rigidezza dell'albero motore, effetto di attrito del cuscinetto che supporta il carico.</p> <p>Possono essere invece trascurati:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rigidzze degli alberi di trasmissione encoder perché poco sollecitati; - attrito cuscinetti che supportano il motore (nel caso in cui siano meno sollecitati rispetto a quelli che supportano il carico o di migliore qualità) - inerzie dei dischi encoder (sono molto minori rispetto alle inerzie di motore e carico, possono comunque ad esse essere accorpate) - inerzie alberi di trasmissione

3	<p>T : nodo inerziale (rif. fisso, non rotante)</p>	<p>Viene quindi disegnato uno schema meccanico in cui si riconoscono i parametri concentrati <u>inerzie, molla e smorzatore</u> ed i <u>gradi di libertà</u> che vengono sintetizzati nei due nodi A e B il cui moto rotazionale viene riferito ad un sistema inerziale od alla struttura che tiene motore e carico a patto che possa essere considerata in quiete. <u>Si aggiunge un nodo terra T come riferimento.</u></p>
4		
4		
4		
4		<p>Nello schema si deve avere cura affinché tutte le variabili di sforzo e portata siano rappresentate assieme ai parametri in gioco.</p>

5		
5		<p>A questo punto risulta agevole ricavare le relazioni in frequenza che sussistono tra le grandezze in gioco. Potrebbero essere analizzate ad esempio le relazioni:</p> $\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)}, \frac{\Omega_{BT}(\omega)}{T(\omega)}, \frac{\Omega_{AT}(\omega)}{T(\omega)}$
5	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{Z_1(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \frac{1}{\frac{i\omega}{K} + \frac{1}{C + i\omega \cdot I_C}}$	<p>Consideriamo la prima funzione che rappresenta la relazione che sussiste tra la misura dinamica dell'encoder posto sul carico e l'encoder solidale al motore.</p>
5	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{K}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot I_C}$	
5	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K}}$	<p>Funzione di trasferimento in forma canonica</p>
6		<p>Mediante i comandi matlab seguenti si traccia il diagramma della funzione di trasferimento $\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)}$:</p> <pre>Im = 40e-6; I_C = 10e-3; K = 5000; C = 1; H = tf([1],[I_C/K C/K 1]) figure, bode(H), grid</pre> <p>Dal diagramma risulta evidente come le armoniche a bassa frequenza risultano identiche per entrambi gli encoder, mentre le armoniche ad alta frequenza, seppur presenti nel nodo motore, vengono ridotte a livello del carico (tale effetto è comunemente conosciuto come effetto volano).</p>
7	$\frac{1}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K}}$	<p>Supponiamo di voler stimare il moto angolare del motore ma di disporre solamente dell'encoder solidale al carico.</p> <p>Si rappresenta il sistema corrispondente alla funzione di trasferimento appena determinata.</p>



7		Si acquisisce l'andamento nel tempo della velocità angolare del carico
7	$\omega_{BT}(t) \xrightarrow{\text{FFT}} \Omega_{BT}(\omega)$	Si trasforma secondo Fourier l'andamento temporale acquisito (se campionato mediante l'algoritmo numerico ottimizzato Fast Fourier Transform FFT)
7	$\Omega_{AT}(\omega) = \Omega_{BT}(\omega) \cdot \left(1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K} \right)$	Si ricava la trasformata dell'andamento di velocità angolare del motore moltiplicando per l'inverso della funzione di trasferimento.
7		Si antitrasforma

Bibliografia

[1] F. Angrilli, Misure Meccaniche e Termiche, Cedam 2005