

Tracciamento dei Diagrammi di Bode

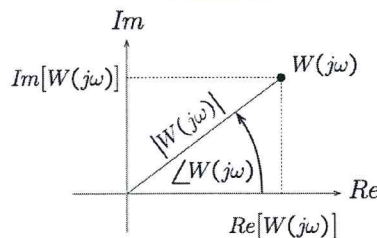
L. Lanari, G. Oriolo

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale
Sapienza Università di Roma

October 24, 2014

diagrammi di Bode

- rappresentazioni grafiche **separate** del **modulo** $|W(j\omega)|$ e della **fase** $\angle W(j\omega)$ del numero complesso $W(j\omega)$ al variare di $\omega / (0, +\infty)$



- essendo

$$\angle(1/W(j\omega)) = -\angle W(j\omega) \quad (/)$$

$$\frac{1}{M(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)}} = \frac{1}{M} \cdot e^{-i\phi}$$

le fasi di $1/W(j\omega)$ si ottengono **ribaltando** quelle di $W(j\omega)$

- sia $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$; essendo

$$H_1(\omega) \cdot e^{i\phi_1(\omega)} \cdot H_2(\omega) \cdot e^{i\phi_2(\omega)} = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot e^{i(\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))}$$

$$\angle(W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)) = \angle W_1(j\omega) + \angle W_2(j\omega) \quad (/)$$

le fasi di $W(j\omega)$ si ottengono **sommando** quelle di $W_1(j\omega)$ e $W_2(j\omega)$

il modulo $|W(j\omega)|$ non gode di proprietà come le (\wedge), (\vee) / si **passa al logaritmo**; in particolare, il modulo si esprime in **decibel (dB)**

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

- essendo $20 \log_{10} \left(\frac{1}{M(s)} \right) = -20 \log_{10} (M(s))$
 $|1/W(j\omega)|_{dB} = -|W(j\omega)|_{dB} \quad (\wedge)$

i moduli in dB di $1/W(j\omega)$ si ottengono **ribaltando** quelli di $W(j\omega)$

- sia $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$; essendo

$$|W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|_{dB} = |W_1(j\omega)|_{dB} + |W_2(j\omega)|_{dB} \quad (\vee)$$

i moduli in dB di $W(j\omega)$ si ottengono **sommando** quelli di $W_1(j\omega)$ e $W_2(j\omega)$

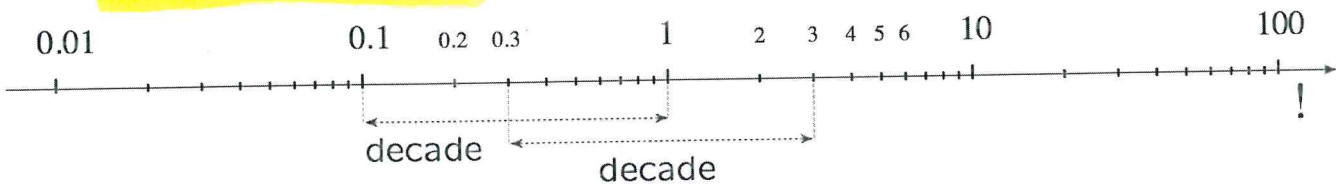
- alcuni valori notevoli

$$|0.1|_{dB} = -20, \quad |1|_{dB} = 0, \quad |10|_{dB} = 20, \quad |100|_{dB} = 40, \quad |\sqrt{2}|_{dB} \neq 3$$

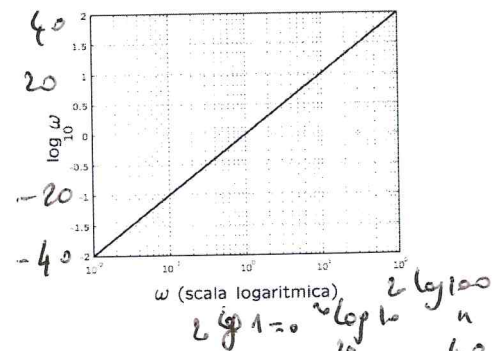
Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

si ribalta ancora il modulo?

- le pulsazioni vengono riportate sull'**asse delle ascisse** usando una **scala logaritmica in base 10**



- la funzione $\log_{10}(x)$ è **lineare** in tale scala



- i diagrammi di alcune funzioni elementari (fattori monomio, binomio e trinomio, vedi più avanti) assumono una forma particolarmente **semplice**
- un altro vantaggio derivante dall'adozione delle scale logaritmiche (in ascissa per le pulsazioni, e in ordinata per i moduli) è ovviamente la possibilità di rappresentare **ampi intervalli di variazione delle grandezze**

forma di Bode della risposta armonica

$$W(j\omega) = \text{costante} \frac{\begin{array}{|l} \text{monomi} \\ \text{binomi} \\ \text{trinomi} \end{array}}{\begin{array}{|l} \text{monomi} \\ \text{binomi} \\ \text{trinomi} \end{array}}$$

contiene 4 tipi di fattori elementari

- **costante k**
- **monomio $j\omega$**
proviene da uno zero (se a numeratore) o da un polo (se a denominatore) in $s = 0$
- **binomio $1 + j\omega\tau$**
proviene da uno zero (se a numeratore) o da un polo (se a denominatore) reale in $-1/\tau$
- **trinomio $1 + 2\tau j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$**
proviene da una coppia di zeri (se a numeratore) o di poli (se a denominatore) complessi coniugati in $a \pm jb$, con $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\tau = -a/\omega_n$

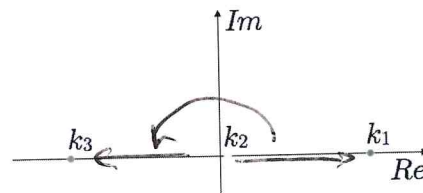
Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

4

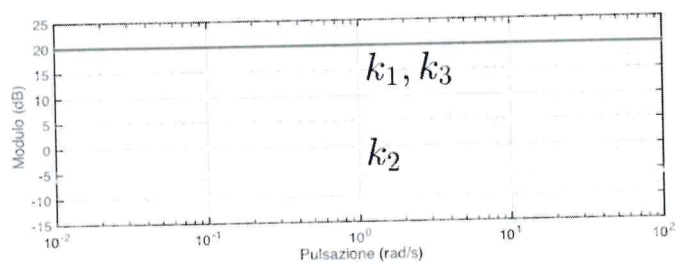
fattore costante k

sul piano complesso

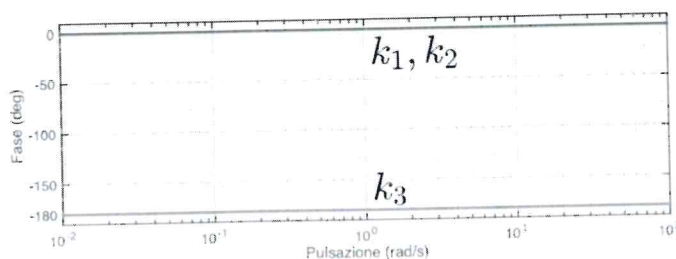
(e.g., $k_1 = 10$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = -10$)



modulo



fase

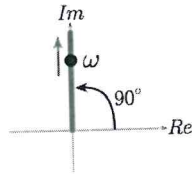


Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

5

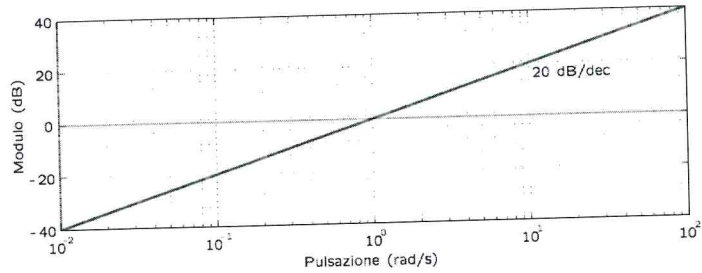
fattore monomio a numeratore $j\omega$

sul piano complesso

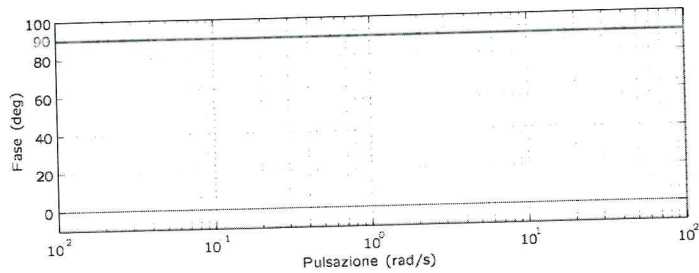


e si ha $|j\omega|_{dB} = 20 \log_{10} \omega$

modulo



fase



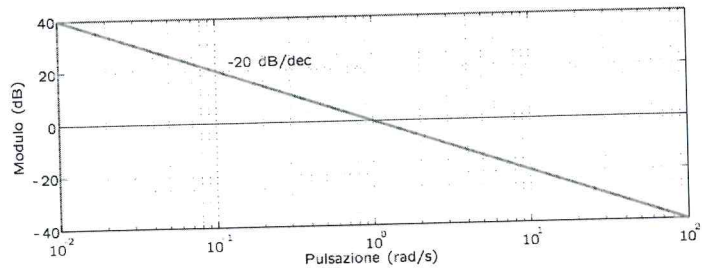
Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

↑
RIBASSO
↓
MAGGIORE & FASE

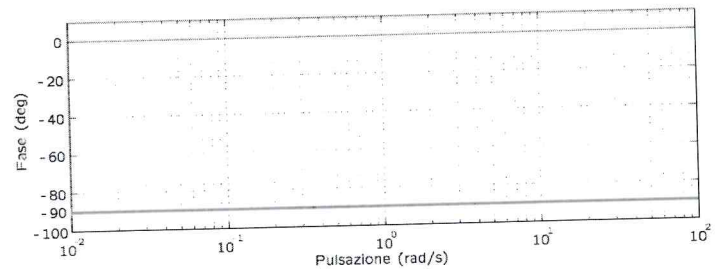
fattore monomio a denominatore $1/j\omega$

dalle (/), (/) si ha

modulo



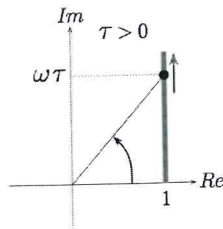
fase



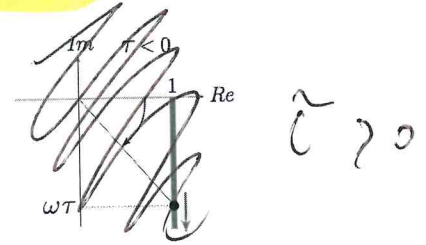
↑
RIBASSO
↓
RIBASSO

fattore binomio a numeratore $1 + j\omega\tau$

sul piano complesso



oppure



- **modulo:** $|1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$; essendo

$$\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \quad / \quad \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ |\omega|\tau & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

si ha

$$|1 + j\omega\tau|_{dB} \quad / \quad \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$

queste due semirette costituiscono il **diagramma asintotico** del modulo

nota: lo scostamento max tra il diagramma reale e quello asintotico si ha proprio in corrispondenza alla **pulsazione di rottura** $1/|\tau|$ e vale $|1 + j\tau/|\tau||_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2}$

Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

per $\omega = \frac{1}{\tau}$ ho $20 \log_{10} \frac{1}{\tau} + 20 \log_{10} \tau = 0$

operando i due segni
si annullano in $\omega = \frac{1}{\tau}$ $\tau > 0$ dec

- **fase:** procedendo in modo analogo si ha

$$\angle 1 + j\omega\tau \quad / \quad \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll 1/|\tau| \\ 90^\circ & \text{se } \omega \gg 1/|\tau| \text{ e } \tau > 0 \end{cases}$$

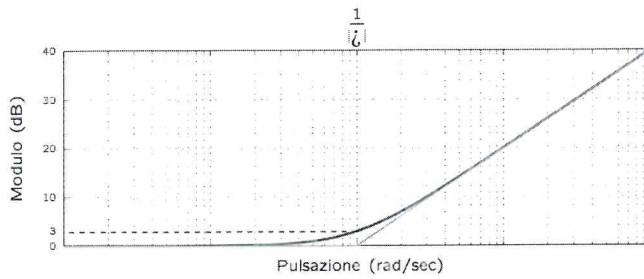
curva

questi due asintoti vengono **raccordati da un segmento che parte da $0.1/|\tau|$ e termina in $10/|\tau|$** ; il **diagramma asintotico** della fase è quindi costituito da una spezzata a tre lati

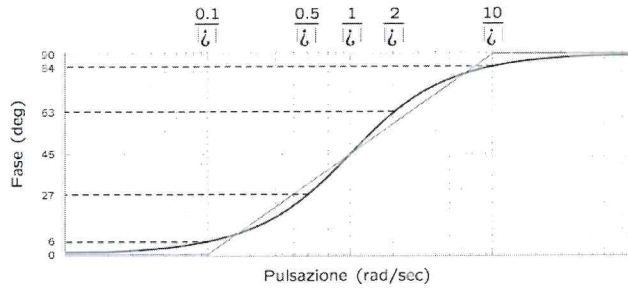
nota: lo scostamento max tra il diagramma reale e quello asintotico si ha in corrispondenza alle pulsazioni $0.1/|\tau|$ e $10/|\tau|$, e vale circa $\pm 6^\circ$

fattore binomio a numeratore $1 + j\omega\tau$

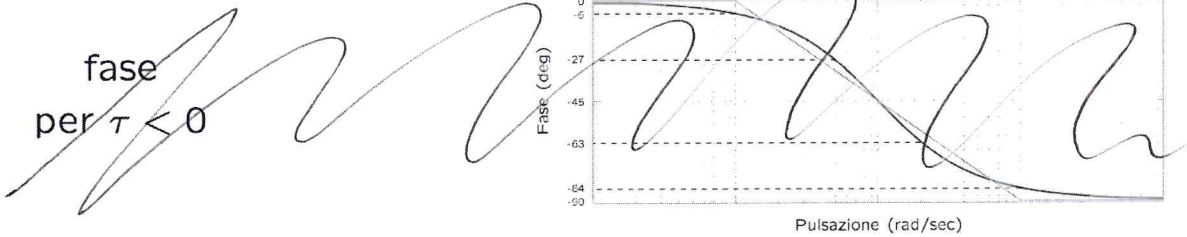
modulo



fase
per $\tau > 0$



fase
per $\tau < 0$



Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

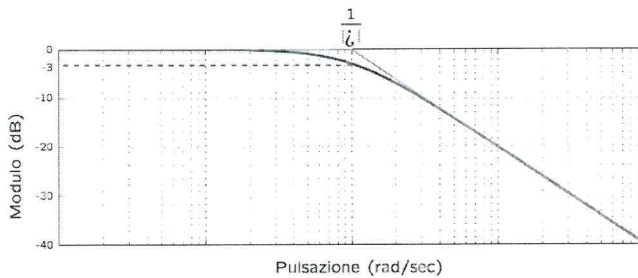
↕ RIBALTO

10

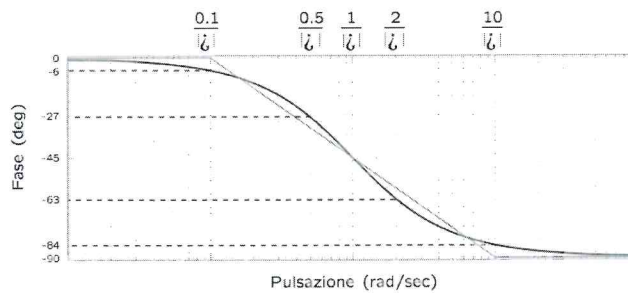
fattore binomio a denominatore $1/(1 + j\omega\tau)$

dalle (/), (\) si ha

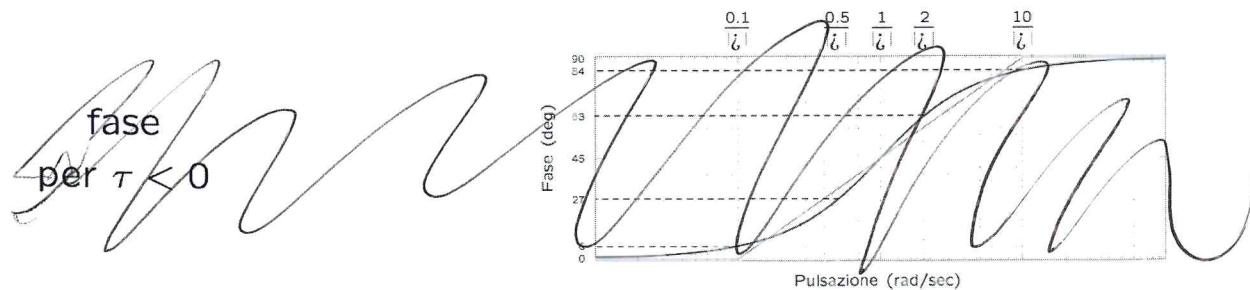
modulo



fase
per $\tau > 0$



fase
per $\tau < 0$

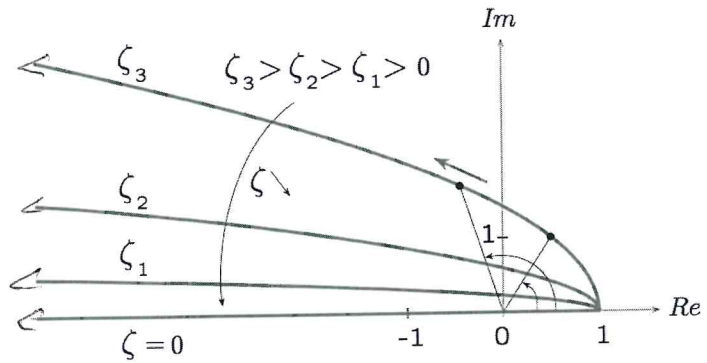


Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

11

fattore trinomio a numeratore $1 + 2\tau j\omega/\omega_n + (j\omega)^2/\omega_n^2$

sul piano complesso



• **modulo:** essendo

$$\left| 1 + 2\frac{\tau}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| = \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\tau\frac{\omega}{\omega_n} \right| = \sqrt{\left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|^2 + 4\tau^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

si ha

$$\left| 1 + 2\frac{\tau}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ \frac{\omega^2}{\omega_n^2} & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Lanari, Oriolo: Tracciamento dei Diagrammi di Bode

12

da cui

$$\left| 1 + 2\frac{\tau}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega / \omega_n \ll 1 \\ 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n & \text{se } \omega / \omega_n \gg 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow +40 \text{ dB/decade}$ $\omega = \omega_n \quad | | = 0$

queste due semirette costituiscono il **diagramma asintotico** del modulo

nota: lo **scostamento** tra il diagramma reale e quello asintotico in corrispondenza alla pulsazione naturale ω_n vale $20 \log_{10} 2|\tau|$

– **dipende da $|\tau|$** ! e.g., per $|\tau| = 0$ lo scostamento in dB vale -6 ; per $|\tau| = 0.5$ vale 0 , per $|\tau| = 1$ vale 6

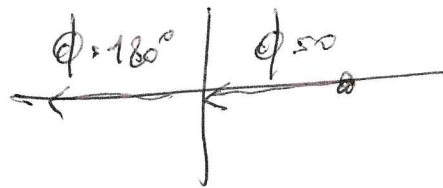
– se $|\tau| < 1/\sqrt{2} / 0.707$, il modulo di un fattore trinomio a numeratore ha un 'picco' negativo (**antirisonanza**) in prossimità della pulsazione naturale, tanto più accentuato quanto minore è $|\tau|$

- **fase:** procedendo in modo analogo si ha

$$\angle \left| 1 + 2\frac{\tau}{\omega_n}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ 180^\circ / (-180^\circ) & \text{se } \omega \gg \omega_n \text{ e } \tau > 0 \text{ (} \tau < 0 \text{)} \end{cases}$$

la transizione tra questi due valori avviene in modo **simmetrico** rispetto alla pulsazione naturale ω_n , e **tanto più bruscamente quanto minore è $|\tau|$** ; in particolare, per $\tau = 0$ si ha una discontinuità nel diagramma delle fasi in corrispondenza a ω_n

nota: non esiste un diagramma asintotico per la fase del termine trinomio

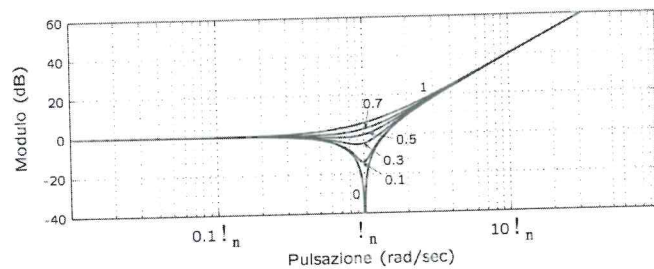


fattore trinomio a numeratore

modulo

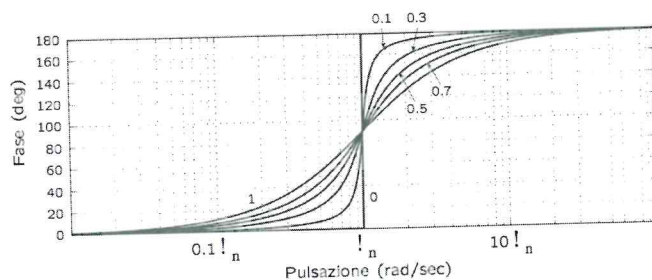
al variare di $|\tau|$

(antirisonanza per $|\tau| < 0.707$)



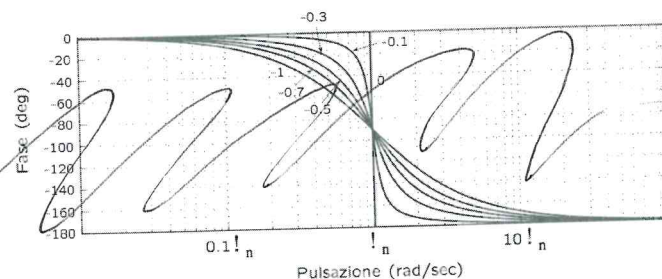
fase

al variare di $\tau / 0$



fase

al variare di $\tau / 0$



fattore trinomio a denominatore

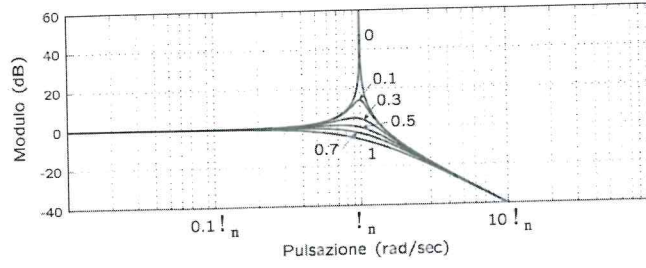
(RIBAZZO)

dalle (1), (2) si ha

modulo

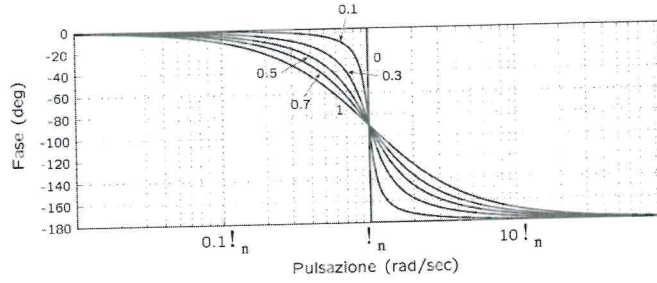
al variare di $|\tau|$

(risonanza per $|\tau| < 0.707$)

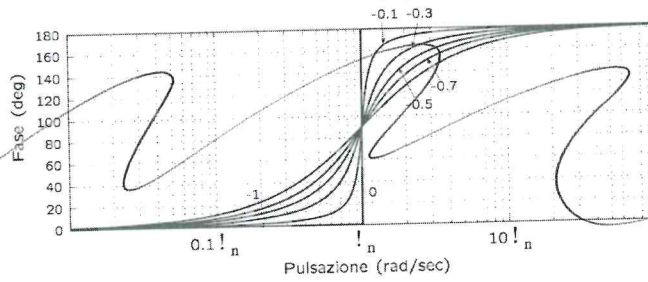


fase

al variare di $\tau / 0$



fase
al variare di $\tau / 0$



GRAMMI di BODE

studio della risposta in frequenza di un sistema meccanico.

→ Funzione di trasferimento: relazione tra ingresso e uscita

$$F(j\omega) = \frac{X_o(j\omega)}{X_i(j\omega)} = \frac{a_n(j\omega)^n + \dots + a_0}{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}$$

si vuole vedere come varia F al variare di ω
MA F assume valori complessi \Rightarrow Bode o Nyquist

→ scala logaritmica perché permette di sostituire prodotti con ~~la~~ somme

$$\Sigma \rightarrow \log(A \cdot B) = \log(A) + \log(B)$$

\Rightarrow ascissa: $\log_{10}(\omega)$
ordinate: $20 \log_{10}(|F|)$ \rightarrow modulo
 $\arg(F)^\circ$ \rightarrow fase

NB: $\log(x \rightarrow 0^+) = -\infty$

→ Tracciamento:

a) riportare la funzione di trasferimento nella forma CANONICA

$$F(j\omega) = K \cdot \frac{(1+j\omega\tilde{\tau}_1) \dots (1+2\xi_j\omega\tilde{\tau}_n + (j\omega\tilde{\tau}_n)^2)}{(1+j\omega\tilde{\tau}_m) \dots (1+2\xi_k\omega\tilde{\tau}_r + (j\omega\tilde{\tau}_r)^2)}$$

b) determinare contributo dei singoli fattori

c) summare tutti i contributi

NB: diagramma asintotico + connessione

NB: strumento di misura utilizzabile quando $|I| = \text{costante}$ e $\angle = \text{lineare}$

NB: scala logaritmica \Rightarrow decadi, $3 \approx 0.5 \cdot \text{decade}$

$$\text{NB: } \left| \frac{1}{x} \right|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{x} \right| = 20 \log_{10} |x|^{-1} = -20 \log_{10} |x| = -|x|_{\text{dB}}$$

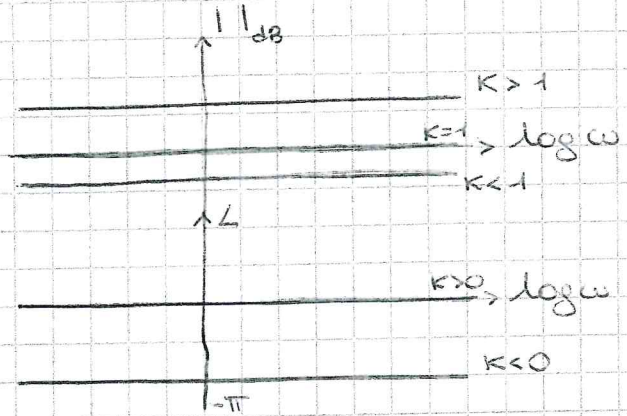
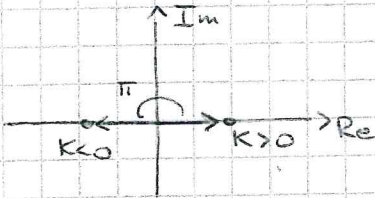
$$\arg \angle \left(\frac{1}{A+jB} \right) = \angle \left(\frac{A-jB}{A^2+B^2} \right) = \angle \left(\frac{A}{A^2+B^2} + j \frac{-B}{A^2+B^2} \right) = \text{atan} \left(\frac{-B}{A} \right) = -\text{atan} \left(\frac{B}{A} \right) = -\angle(A+jB)$$

ANALISI di FUNZIONI NOTEVOLI:

1) $F(j\omega) = K \quad \rightsquigarrow \quad X_0 = K \cdot X;$ strumento di ordine 0

$\Rightarrow |F| = |K| \Rightarrow 20 \log(|K|)$

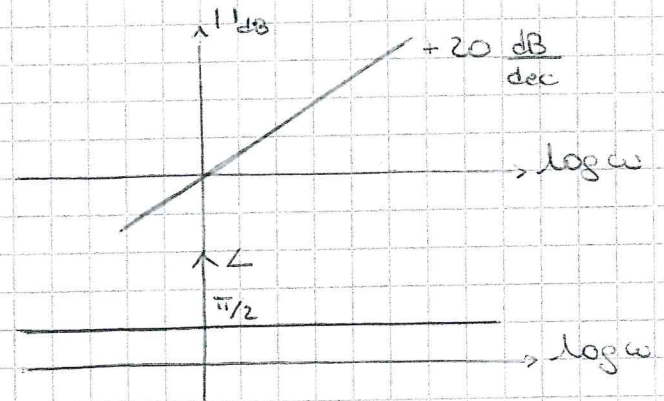
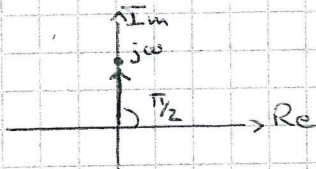
$\angle F = \begin{cases} 0 & (K > 0) \\ -\pi & (K < 0) \end{cases}$



2) $F(j\omega) = j\omega \quad \rightsquigarrow \quad$ zero nell'origine

$\Rightarrow |F|_{dB} = |j\omega|_{dB} = 20 \log |j\omega|$
 $\quad \quad \quad = 20 \log(\omega)$

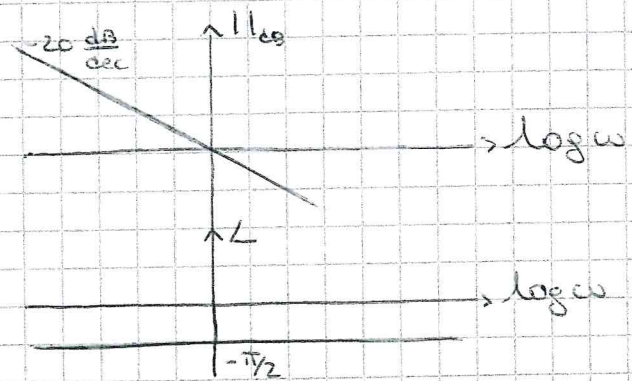
$\angle F = \frac{\pi}{2}$



NB: $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$

$\Rightarrow |F|_{dB} = -20 \log(\omega)$

$\angle F = -\frac{\pi}{2}$

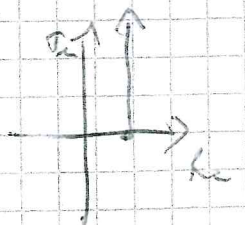


NB: $\omega = 1 \rightsquigarrow \log \omega = 0 \Rightarrow |F|_{dB} = 0 \text{ dB}$

$\omega = 10 \rightsquigarrow \log \omega = 1 \Rightarrow |F|_{dB} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ dB}$

$\omega = 100 \rightsquigarrow \log \omega = 2 \Rightarrow |F|_{dB} = 20 \cdot 2 = 40 \text{ dB}$

\Rightarrow pendenza della retta: $20 \frac{dB}{dec}$



$$F(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

$$\Rightarrow |F|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

\rightarrow asintoti:

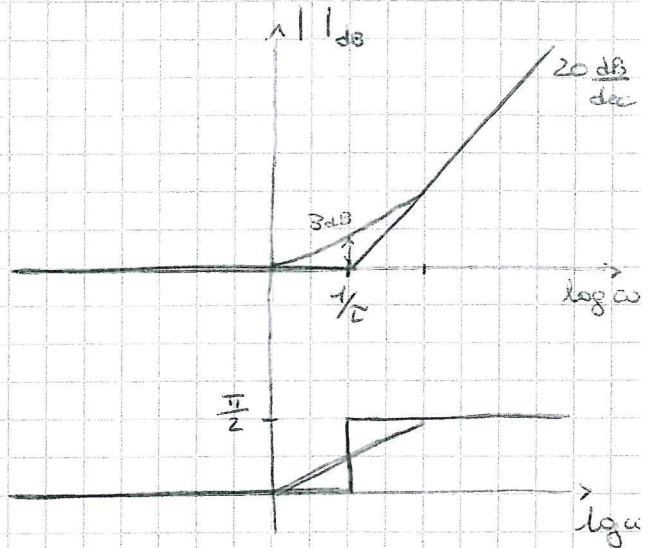
$$\bullet \omega \rightarrow 0 \Rightarrow |F|_{dB} = 0$$

$$\bullet \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |j\omega\tau|_{dB} = 20 \log(\omega\tau) \\ = 20 \log\tau + 20 \log\omega$$

\Rightarrow intersezione in $\bar{\omega} = 1/\tau$

$$\angle F = \arctg(\omega\tau) = \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0 \\ \pi/2 & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\sum \omega = \bar{\omega} = 1/\tau \Rightarrow \angle F = \pi/4$$

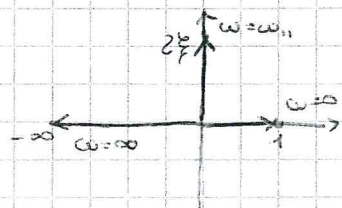


NB: $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow$ simmetria rispetto $\log\omega$

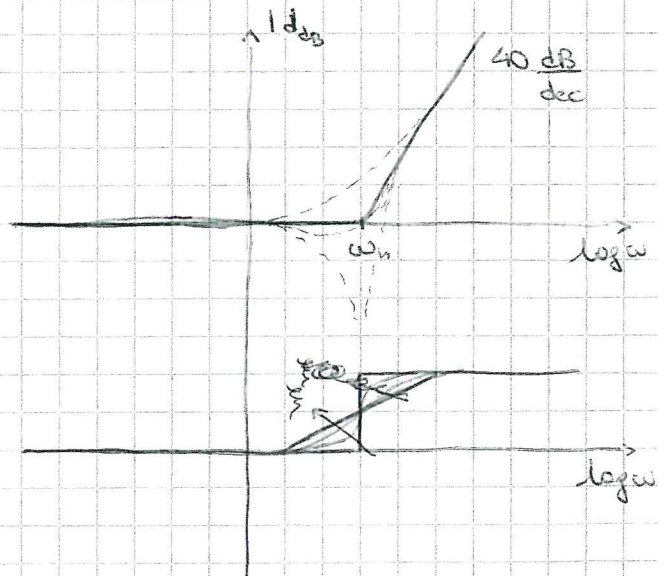
1) $F(j\omega) = \left(1 + 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} j + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right) \rightarrow$ zeri complessi coniugati

$$\Rightarrow |F|_{dB} = \begin{cases} |F|_{dB} = 0 & \omega \rightarrow 0 \\ \left| -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right| = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega \rightarrow \infty \rightarrow \text{asintoto verticale} \\ 20 \log(2\xi) & \omega = \omega_n \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0 \rightarrow |F|_{dB} = -\infty \\ \xi = 0.5 \rightarrow |F|_{dB} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\angle F \rightarrow$ asintotico



$$\Rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \angle F = 0 \\ \omega = \omega_n \Rightarrow \angle F = \pi/2 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle F = \pi \end{cases}$$

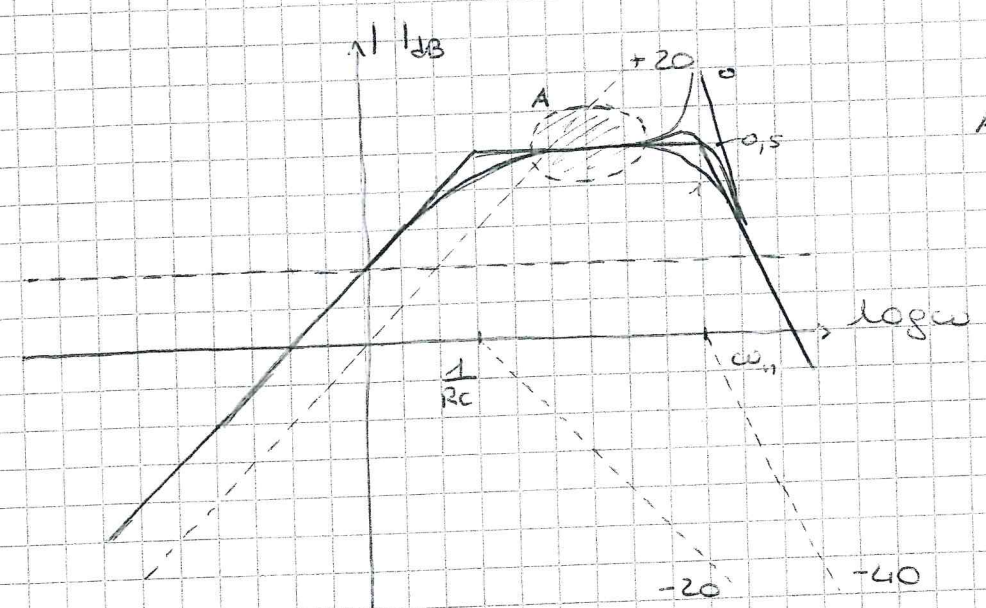


esempio: funzione di trasferimento di un accelerometro piezoelettrico

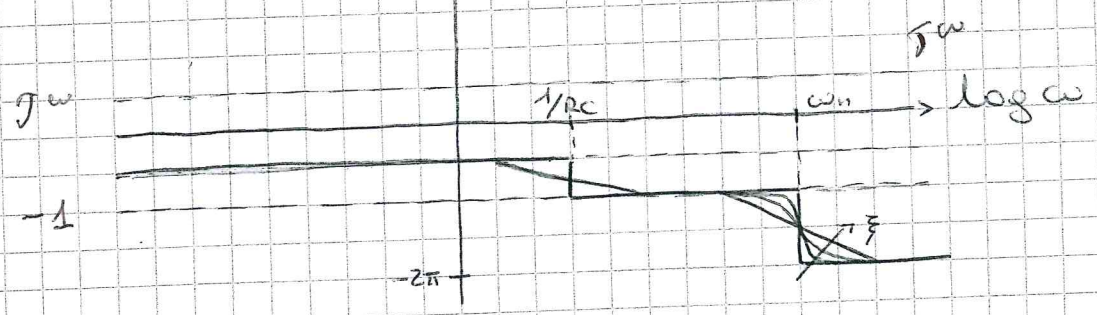
$$F(j\omega) = \frac{RM}{KKE} \cdot \frac{j\omega}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega_n = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$



A = zona di utilizzo dello strumento
 => banda max per ξ = 0,67



Riferimenti:

- > Google: "diagrammi di Bode"
- > www.ing.unitn.it/~oboer/LezOS.pdf