

Luca Baglivo, Mariolino De Cecco

Navigazione di Veicoli Autonomi

Fondamenti di “sensor fusion” per la localizzazione

Appunti per il corso di “Robotica e Sensor Fusion per i Sistemi Meccatronici”
per Ingegneria Meccatronica

INDICE

1.	Introduzione	2
2.	Fondamenti del “sensor fusion”	3
2.1.	Modelli probabilistici. Il teorema di Bayes.....	3
2.1.1.	Modello di Stato ed Osservazione	3
2.1.2.	Modelli Probabilistici.....	5
2.1.3.	Teorema di Bayes.....	7
2.1.4.	Applicazione del teorema di Bayes al sensor fusion.....	15
2.1.5.	Filtro Bayesiano ricorsivo.....	19
2.1.6.	Il filtro di Kalman	20
2.1.6.1.	Algoritmo del filtro di Kalman	26
2.1.6.2.	Misura delle prestazioni del filtro di Kalman	28
2.2.	Alternative ai modelli probabilistici	29
2.2.1.1.	Calcolo degli intervalli.....	30
2.2.1.2.	Fuzzy Logic.....	30
2.2.1.3.	Teoria dell’Evidenza.....	31
3.	Bibliografia	32

1. Introduzione

La navigazione autonoma è intesa come l'insieme delle tecniche per mezzo delle quali si rende un sistema in grado di spostarsi con un certo livello di autonomia in un certo tipo di ambiente (terrestre, aereo, subacqueo, spaziale). I problemi che nel campo della navigazione autonoma vengono affrontati riguardano innanzitutto la *localizzazione* del sistema rispetto all'ambiente, la pianificazione del proprio compito e il controllo del moto.

Un'interessante categoria di sistemi a cui si applica lo studio della navigazione autonoma è quella dei sistemi AGV (Autonomous Guided Vehicles). Essi trovano ormai largo impiego in industrie, porti, aeroporti, ospedali, etc, tuttavia misurare la posizione e l'assetto di un veicolo è ancora un problema di consistente interesse.

Il sensor fusion è il processo che combina le informazioni provenienti da un certo numero di sorgenti differenti per fornire una descrizione completa e robusta (misura) di un insieme di variabili di interesse. Il sensor fusion è di particolare utilità in ogni applicazione in cui molte misure devono essere combinate assieme, fuse e ottimizzate allo scopo di ottenere informazioni di qualità e integrità atte allo scopo dell'applicazione. Le tecniche di sensor fusion trovano applicazione in molti sistemi industriali, militari, di monitoraggio, di sorveglianza civile, in processi di controllo e in sistemi informatici. Il problema della localizzazione dei veicoli autonomi, in cui nella quasi totalità dei casi i singoli trasduttori si rivelano insufficienti nel costituire un sistema di localizzazione completo e robusto per la navigazione autonoma, richiede l'impiego di tecniche di sensor fusion per combinare le misure provenienti da differenti tipologie di trasduttori le cui caratteristiche, se fuse tra loro, permettono di ottenere una misura più affidabile e accurata dello stato del sistema e dell'ambiente ad esso circostante.

Le tecniche di sensor fusion trovano importanti applicazioni nel campo della navigazione autonoma, in cui è necessario ottenere una stima ottima della misura di posizione e assetto (*posa*) di un robot mobile. I metodi di misura incrementali o di dead-reckoning, che utilizzano encoders, giroscopi ultrasuoni etc., hanno i considerevoli vantaggi di essere auto-contenuti all'interno del robot, di essere relativamente semplici da usare e garantire un'elevata frequenza di aggiornamento della misura. Per contro, poiché questi sistemi di misura integrano incrementi relativi, gli errori crescono notevolmente all'aumentare del tempo di integrazione [3,5,6]. I sistemi di navigazione riferiti all'ambiente fanno uso di riferimenti nell'ambiente in cui il robot si sposta. Questi sistemi hanno una frequenza di aggiornamento più bassa rispetto a quelli incrementali e funzionano solo in determinate condizioni di visibilità dei riferimenti artificiali. Hanno però dei considerevoli vantaggi: poiché la misura di posizione e assetto è effettuata rispetto ai riferimenti fissi nell'ambiente, l'incertezza resta comunque limitata ed è garantita la ripetibilità della misura rispetto all'ambiente.

Per mantenere flessibilità nella pianificazione del percorso e per ottenere robustezza nell'accuratezza della misura rispetto alle condizioni di lavoro, è possibile utilizzare una combinazione dei sistemi di navigazione incrementali e di quelli riferiti all'ambiente. In tal modo si garantisce un'elevata frequenza di aggiornamento della misura e un'incertezza limitata nella stima della posa.

Vengono di seguito presentati i fondamenti su cui si basa lo sviluppo di tecniche di sensor fusion secondo la quantificazione dell'incertezza con modelli di tipo probabilistico (teorema di Bayes, filtro di Kalman) e brevi cenni sui modelli alternativi a quello probabilistico.

2. Fondamenti del “sensor fusion”

2.1. *Modelli probabilistici. Il teorema di Bayes.*

Ogni processo di misura implica che nell'informazione ottenuta da un sensore sia contenuto un certo livello di incertezza e questa, ai fini pratici di utilizzo della misura, e a maggior ragione per il sensor fusion, va in qualche modo rappresentata analiticamente e quantificata. Importanti indicazioni vengono fornite in tal senso dalla norma ISO [8] che definisce la misura come un insieme di elementi: un valore, un intervallo di valori ad esso associato, un'unità di misura e un livello di confidenza che definisce la probabilità che la misura si trovi all'interno dell'intervallo indicato. Però, come si vedrà più avanti, per combinare più misure/informazioni, ovvero per il Sensor Fusion, quello che occorre è anche la funzione densità di probabilità associata alla misura. Questa funzione è presa in considerazione prima della operazione di integrazione della densità di probabilità, da cui risulta un semplice intervallo, quello che viene poi associato alla misura insieme all'intervallo di confidenza. A valle di questa operazione, perciò, si perdono le informazioni relative a come la probabilità si distribuisce attorno al valore definito. Ad esempio, se si ipotizza una funzione densità di probabilità di tipo Gaussiano, la misura sarà costituita dal valor medio e da un intervallo di valori centrato attorno alla media μ e di ampiezza pari a un certo coefficiente moltiplicato per la deviazione standard σ della distribuzione. Se si vuole associare alla misura un livello di confidenza del 95% (come accade usualmente), l'intervallo avrà i propri estremi a $\pm 2\sigma$ dal valor medio. Una volta definiti gli elementi della misura, verrà omesso il tipo di distribuzione di probabilità utilizzato, informazione che però è fondamentale in un'applicazione di Sensor/Data Fusion. Per comprendere l'affermazione appena enunciata sarà necessario seguire il filo del discorso sviluppato nella presente dispensa in cui pertanto si lavorerà con le funzioni densità di probabilità associate all'oggetto della misura (il misurando) e non con i semplici intervalli visti nei corsi dedicati e suggeriti dalla norma ISO.

Sebbene vi siano molti metodi per rappresentare l'incertezza, a tutt'oggi i modelli più utilizzati sono quelli *probabilistici*. La loro vasta diffusione è giustificata dalla relativa semplicità nell'utilizzo rispetto ad altri metodi e dalla loro caratteristica di essere intuitivi per l'impiego nella fusione di informazione e nella logica decisionale (che viene a monte della fusione).

Non è detto, tuttavia, che la probabilità sia sempre il miglior modo per rappresentare l'incertezza, difatti la realtà suggerisce a volte l'utilizzo di metodi alternativi per ottenere un'informazione che sia più completa e aderente alla misura e alla sua incertezza. Sarà più avanti fatto cenno ai principali modelli alternativi a quelli probabilistici.

Segue la descrizione degli elementi essenziali alla modellazione probabilistica per il sensor fusion:

- densità di probabilità
- probabilità condizionata
- teorema di Bayes

Prima di passare alla descrizione dei modelli probabilistici è però necessario introdurre i concetti di stato ed osservazione di un sistema e dei relativi modelli che ne descrivono l'evoluzione.

2.1.1. Modello di Stato ed Osservazione

I concetti di stato e di osservazione di un sistema sono alla base dello sviluppo di varie teorie, tra cui, di nostro interesse, la teoria dei controlli e la teoria del data fusion. Una volta definito un modello fisico della natura di un sistema, più o meno vicino alla realtà, il concetto di *stato* di un sistema è associato al concetto di valore vero delle variabili di interesse di quel sistema, ossia dei valori che possono assumere le grandezze fisiche o le proprietà in genere che definiscono il modello

del sistema. Il valore vero di uno stato è anche detto *misurando*, ossia grandezza fisica il cui valore è oggetto di indagine nel processo di misurazione. Ad esempio, si vuole costruire un modello cinematico di un veicolo. Si parte dall'assunzione che esso sia un corpo rigido, si sceglie un punto solidale al veicolo e ad esso si associa un asse di riferimento, un vettore posizione (nel piano, ad esempio, due coordinate cartesiane e un angolo di assetto) e un vettore velocità (due velocità lineari e una velocità angolare). Lo stato sarà costituito dal vettore posizione e dal vettore velocità. Nel modello si descrive come evolve nel tempo (la derivata dello stato rispetto al tempo) il sistema in funzione del suo stesso stato e di altri possibili parametri.

Forma standard del modello lineare di stato di un sistema:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)v(t) \quad (2-1)$$

Dove

$x(t) \in \mathfrak{R}^n$ è il vettore di stato, ossia il vettore di interesse,

$u(t) \in \mathfrak{R}^s$ è noto come vettore di controllo,

$v(t) \in \mathfrak{R}^q$ è una variabile casuale (detta rumore) da cui dipende l'incertezza nell'evoluzione dello stato nel tempo (nell'esempio precedente potrebbe essere un errore di accelerazione, cioè della derivata della variabile di stato velocità),

$F(t)$ è la matrice di stato (o di modello) e ha dimensione $n \times n$,

$B(t)$ è la matrice di input e ha dimensione $n \times s$,

$G(t)$ è la matrice di rumore e ha dimensione $n \times q$

Forma standard del modello di osservazione (o modello di misura di un sistema):

$$z(t) = H(t)x(t) + D(t)w(t) \quad (2-2)$$

Dove

$z(t) \in \mathfrak{R}^m$ è il vettore di osservazione,

$w(t) \in \mathfrak{R}^r$ è una variabile casuale che descrive l'incertezza nell'osservazione

$H(t)$ è la matrice del modello di misura e ha dimensione $m \times n$

$D(t)$ è la matrice del rumore di misura e ha dimensione $m \times r$

Le precedenti due equazioni definiscono l'evoluzione di un sistema a tempo continuo con osservazioni a tempo continuo dello stato. Chiaramente, per l'implementazione del modello di stato e di osservazione in un algoritmo di controllo o in un algoritmo di fusione (quale il filtro di Kalman), è necessario costruire i modelli a tempo discreto. In tal caso la variabile temporale continua t diventa l'insieme degli istanti di integrazione $t = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k\}$ fino al passo k-esimo e le Equazioni (2-1) e (2-2) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$x(t_k) = F(t_k)x(t_{k-1}) + B(t_k)u(t_k) + G(t_k)v(t_k) \quad (2-3)$$

$$z(t_k) = H(t_k)x(t_k) + D(t_k)w(t_k) \quad (2-4)$$

Si tralascia la trattazione che porta a calcolare le matrici a tempo discreto $F(t_k)$, $B(t_k)$, $G(t_k)$, $H(t_k)$, $D(t_k)$ a partire dalla loro corrispondenti a tempo continuo. Se l'intervallo di tempo $\Delta t(k) = t_k - t_{k-1}$ tra due successive iterazioni resta costante è uso comune scrivere le Equazioni (3-3) e (3-4) nella forma sintetica:

$$x(k) = F(k)x(k-1) + B(k)u(k) + G(k)v(k) \quad (2-5)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + D(k)w(k) \quad (2-6)$$

In cui l'indice k rappresenta la variabile $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$.

Il modello di stato, se rispecchiasse esattamente la natura del sistema, fornirebbe una conoscenza completa della sua evoluzione, una volta note le condizioni iniziali e le variabili di input (controllo). Purtroppo, a causa di fattori di incertezza di varia natura, tra cui la stessa inevitabile approssimazione con cui il modello è costruito, spesso la conoscenza delle variabili di interesse derivante dal modello di stato non è sufficiente. Occorre perciò ottenere delle informazioni aggiuntive effettuando delle *osservazioni* (misure) dello stato. Anch'esse rispondono a un modello più o meno completo che descrive come l'osservazione è legata allo stato da cui dipende e vi si può associare un'incertezza (di tipo probabilistico o di altro tipo). L'obiettivo fondamentale del sensor fusion, nel caso di veicoli autonomi, è quello di migliorare la conoscenza della posizione del veicolo in funzione del tempo allo scopo di poter utilizzare i veicoli per compiti complessi che richiedono una misura e un controllo di posizione molto accurati, cercando di ridurre l'incertezza introdotta dai fattori di disturbo; tra questi, oltre alle fonti di incertezza che caratterizzano tutti i sensori, è da considerarsi anche il non perfetto rispetto dei vincoli non olonomi (slittamento delle ruote e altri fenomeni), il che si traduce in una incertezza di modello oltre a quella di misura.

2.1.2. Modelli Probabilistici

Innanzitutto si introduce il concetto di *realizzazione* di un valore della variabile casuale x : nei processi stocastici i valori di $x \in X$ che si manifestano vengono definiti realizzazioni del processo aleatorio. Di seguito i termini “realizzarsi” e “verificarsi” saranno intesi equivalenti.

Una funzione densità di probabilità (*pdf*) $P_y(y)$ (o semplicemente $P(y)$) è definita su una variabile random (casuale) y che può essere uno scalare o un vettore.

La *pdf* è considerata un *modello probabilistico* della quantità y , sia essa un'osservazione o uno stato del sistema (vedi §2.1.1)

La *pdf* è valida se:

1. $P(y) > 0, \forall y$;
2. la probabilità complessiva è: $\int_y P(y)dy = 1$.

in cui il valore unitario indica la certezza che l'evento associato ad y accada

La *distribuzione congiunta* $P_{xy}(x, y)$ è definita nella stessa maniera di $P(y)$ e rappresenta la distribuzione di probabilità del realizzarsi congiuntamente di due variabili random.

La densità di probabilità *marginale* di $P_y(y)$ è associata alla probabilità congiunta ed è la funzione che per ogni valore di y esprime la probabilità che esso si realizzi congiuntamente a tutti i possibili valori di x . Si ottiene integrando la $P_{xy}(x, y)$ rispetto a x :

$$P_y(y) = \int_x P_{xy}(x, y)dx \quad (2-7)$$

e allo stesso modo integrando rispetto a y si ottiene la *pdf* marginale $P_x(x)$.

La *pdf* congiunta su n variabili $P(x_1, \dots, x_n)$ può essere definita allo stesso modo della *pdf* congiunta di due variabili.

La *pdf* condizionata $P(x|y)$ è la densità di probabilità associata alla variabile x condizionata al verificarsi precedentemente di un dato valore di y . In altri termini, quando y si è già realizzato, ci interessa calcolare la densità di probabilità della variabile x . E' definita nel modo seguente:

$$P(x|y) \triangleq \frac{P(x, y)}{P(y)} \quad (2-8)$$

e ha le stesse proprietà di una *pdf* con la variabile x dipendente da un valore fissato della variabile y . Allo stesso modo si definisce la *pdf* condizionata $P(y|x)$.

Dunque, per esprimere una *pdf* congiunta in termini di distribuzioni condizionate e marginali si può utilizzare la regola di derivazione delle distribuzioni condizionate :

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) \quad (2-9)$$

Questa equazione deriva dal concetto di relazione tra due variabili. Le variabili x e y possono appartenere allo stesso insieme o a insiemi diversi, ciò che conta ai fini della distribuzione congiunta è se le due variabili sono correlate tra loro o meno. $P(x, y) \neq P(x) \cdot P(y)$ in quanto, dopo che y si è realizzato, se ci sono relazioni tra x e y l'insieme a cui x appartiene risulta modificato e quindi anche la sua probabilità di realizzazione, quindi in generale $P(x) \neq P(x|y)$, invece se tra x e y non ci sono relazioni $P(x) = P(x|y)$.

La regola di derivazione può essere estesa a un numero qualsiasi di variabili nel modo seguente:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1|x_2, \dots, x_n)P(x_2|x_3, \dots, x_n) \dots P(x_{n-1}|x_n)P(x_n) \quad (2-10)$$

Sostituendo l'Equazione (2-9) nell'Equazione (2-7) si ottiene l'espressione della distribuzione marginale di una variabile in termini della distribuzione marginale di una seconda variabile:

$$P_y(y) = \int_x P_{y|x}(y|x)P_x(x)dx \quad (2-11)$$

Quest'equazione è conosciuta come *teorema della probabilità totale*. Esso asserisce che la densità di probabilità di y può essere ottenuta considerando i modi in cui y può verificarsi condizionatamente al realizzarsi di uno specifico valore di x ($P_{y|x}(y|x)$), pesata dalla probabilità che ciascuno di questi valori di x si realizzi ($P_x(x)$).

Se la conoscenza del valore di y non aggiunge informazioni circa il valore di x allora x e y sono detti *indipendenti* e

$$P(x) = P(x|y)$$

Perciò in questo caso:

$$P(x, y) = P(x)P(y) \quad (2-12)$$

Applicando la regola di derivazione alla funzione di densità di probabilità congiunta di tre variabili:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= P(x, y|z)P(z) \\ &= P(x|y, z)P(y|z)P(z) \end{aligned}$$

Che insieme all'ipotesi di indipendenza condizionale tra x e y , una volta fissato il valore di z , porta al risultato intuitivo:

$$P(x, y, z) = P(x, y|z) \cdot P(z) = P(x|z) \cdot P(y|z) \cdot P(z)$$

E quindi:

$$P(x, y|z) = P(x|z) \cdot P(y|z) \quad (2-13)$$

In altri termini, se la x è indipendente dalla y data la conoscenza di z (poiché z contiene tutte le informazioni contenute nella y riguardo a x) allora la *pdf* congiunta di x e y condizionata a z è semplicemente il prodotto delle *pdf* marginali di x e y ciascuna condizionata a z , come nell'Equazione (2-12).

Il concetto di indipendenza condizionale sta alla base di molti algoritmi di data fusion. E' importante fare chiarezza con un esempio: consideriamo lo stato x di un sistema e due osservazioni z_1 e z_2 . Le due osservazioni non sono indipendenti tra loro:

$$P(z_1, z_2) \neq P(z_1)P(z_2)$$

Infatti entrambe dipendono dallo stato x in comune. Per contro, è ragionevole assumere che la sola cosa che le due osservazioni hanno in comune è lo stato del sistema, perciò le osservazioni saranno indipendenti una volta che lo stato si è realizzato; ossia si può scrivere che

$$P(z_1, z_2|x) = P(z_1|x)P(z_2|x)$$

2.1.3. Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes è, per quanto semplice, un risultato di importanza fondamentale nello studio dei modelli probabilistici e di conseguenza nella progettazione di algoritmi di data fusion.

Si considerino due variabili casuali x e z . Ai fini applicativi del teorema di Bayes al problema del data fusion si attribuisce alla variabile x lo stato di interesse del sistema, o misurando, e a z l'osservazione di quello stato, o misura (ad esempio lo stato di interesse può essere la velocità lineare di un veicolo e l'osservazione può essere un valore misurato di velocità angolare delle ruote, che attraverso la conoscenza del raggio delle ruote, in genere del modello di osservazione, porta alla stima della velocità lineare, oppure può essere una misura diretta di velocità lineare).

La regola di derivazione delle probabilità condizionali può essere usata per esprimere la funzione densità in due modi diversi:

$$P(x, z) = P(x|z)P(z) = P(z|x)P(x)$$

Il teorema di Bayes si ottiene esprimendo la $P(x|z)$ grazie all'ultima equazione scritta sopra:

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)} \quad (2-14)$$

Nell'Equazione (2-14) la distribuzione marginale $P(z)$ serve semplicemente a normalizzare la distribuzione posteriore (è un termine che non dipende dalla variabile x che è quella di interesse, e quindi si può considerare *costante*), infatti:

$$\int_x P(x|z) \cdot dx = \int_x \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)} \cdot dx = \int_x \frac{P(x,z)}{P(z)} \cdot dx = \frac{P(z)}{P(z)} = 1$$

L'Equazione (2-14) mostra che $P(x|z)$ è una funzione densità di probabilità ed esprime quello che si cerca tipicamente in una operazione di misurazione, ovvero la probabilità associata con il misurando x , data la misura z dallo strumento di cui disponiamo. A valle di ciò ci si potrà riferire alla norma ISO per dare un valore ed un intervallo con confidenza oltre alla unità di misura impiegata.

Il teorema di Bayes fornisce perciò un metodo diretto per combinare l'informazione osservata con la stima precedente della densità di probabilità associata al misurando (ovvero la $P(x)$) per ottenere una nuova densità di probabilità, condizionata alla misura z , quindi migliore di quella precedente. Esso è pertanto alla base di molti algoritmi di data fusion.

In altri termini l'informazione contenuta nell'osservazione viene utilizzata per calcolare la nuova distribuzione di probabilità associata allo stato x rispetto alla funzione densità di probabilità precedente. Questa nuova distribuzione è chiamata **distribuzione posteriore** $P(x|z)$ e descrive le probabilità associate a x data l'osservazione z .

Per comprendere più a fondo il valore e l'utilità di questa (apparentemente) semplice manipolazione delle funzioni densità di probabilità occorre analizzare il significato delle funzioni $P(x|z)$, $P(z|x)$, $P(z)$ e $P(x)$.

La pdf $P(x)$ è la **funzione densità di probabilità precedente** e quantifica l'incertezza con cui si conosce il valore atteso di uno stato, prima della nuova osservazione z .

Al fine di ottenere maggiori informazioni circa lo stato x , **si effettua un'osservazione** z . Le osservazioni sono modellate dalla funzione di densità di probabilità condizionata $P(z|x)$ che descrive, per ogni fissato stato $x \in X$, la probabilità che sarà fatta l'osservazione $z \in Z$, altrimenti detta come la probabilità di z dato x .

La distribuzione condizionata $P(z|x)$ ricopre il ruolo di quello che è chiamato *modello del sensore*. In tale modello x è l'ingresso/misurando e z è l'uscita/osservazione del sensore. Questa distribuzione può essere pensata in due modi distinti.

1. il primo è riferito alla *costruzione del modello del sensore* (vedi Figura 2-1), in tal caso la distribuzione si ottiene fissando un particolare valore di $x = x_p$ trovando quale risulta la pdf relativa alla variabile z (coincide con il processo di taratura in cui si determina l'incertezza dello strumento in funzione dell'ingresso). Perciò, in questo caso $P(z|x_p)$ è considerata funzione di z . Per esempio si supponga di conoscere il valore vero della distanza da un target (x_t), allora $P(z|x_t)$ sarà la distribuzione delle osservazioni (misure) attorno a questo valore (vedi Figura 2-2).

2. se invece esiste già un modello del sensore, supponiamo di fare un'osservazione e di fissare perciò $z = z_p$. Da questa osservazione si vuole inferire il valore dello stato x . In questo caso la distribuzione $P(z_p|x)$ è una funzione di x ed è nota come **Funzione di Verosimiglianza** $\Lambda(x) = P(z_p|x)$ (vedi Figura 2-3).



Figura 2-1: Modello probabilistico del sensore.

In fase di taratura si opera in modo diretto come in Figura 2-2, però a noi interessa in realtà il processo inverso, che è la $P(x|z)$, ovvero la distribuzione del valore del misurando x in base alla misura z .

Nell'implementazione pratica del teorema di Bayes (Equazione (2-14)), $P(z|x)$ è costruita come funzione di entrambe le variabili e nel caso di variabili discrete assume forma matriciale. Per ogni valore di x fissato si definisce una distribuzione di z . Quindi al variare di x viene creata una famiglia di distribuzioni in z .

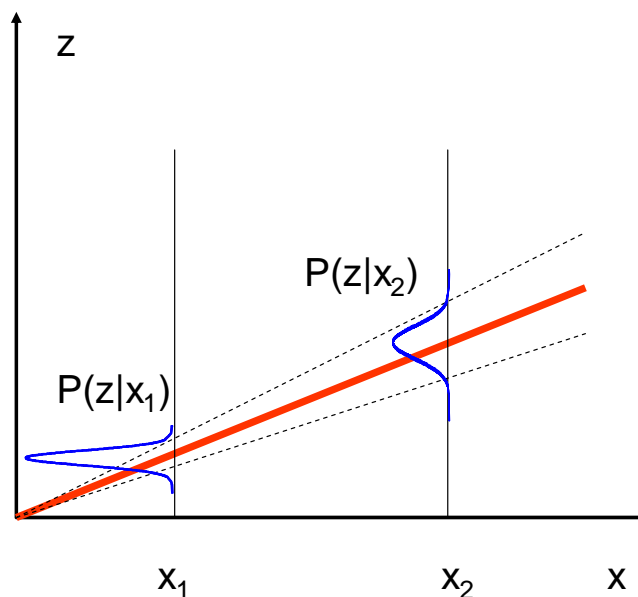


Figura 2-2: Modello del sensore: si suppone noto il valore vero dello stato e si osserva la distribuzione delle misure di questo valore. Equivale alla fase di taratura del sensore, in cui il valore vero del misurando è quello rilevato con uno strumento di riferimento di accuratezza superiore a quello da tarare

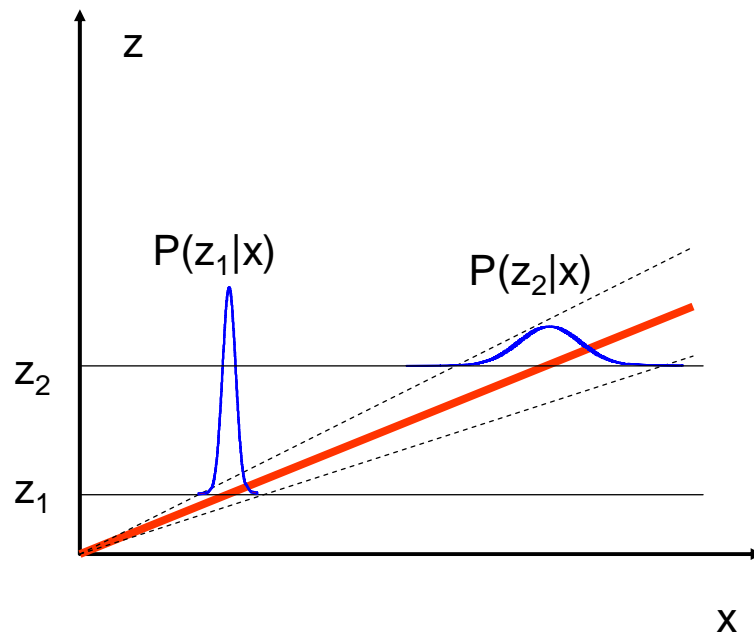


Figura 2-3: Funzioni di verosimiglianza: quello che si fa quando si effettua una misura è leggere un'uscita dello strumento (z_1 o z_2) e associare ad essa una distribuzione possibile del valore vero dello stato.

Esempio 1

Si consideri uno stato x a valori continui, ad esempio la distanza da un target, e un'osservazione z di questo stato. Il modello utilizzato per la distribuzione delle osservazioni del valor vero dello stato, di comune uso per questo tipo di osservazioni, è quello Gaussiano, ossia della Distribuzione Normale, in cui le osservazioni sono distribuite con media x e varianza σ_z^2 :

$$P(z|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-x)^2}{\sigma_z^2}\right) \quad (2-15)$$

Questa è da considerarsi una funzione di entrambe le variabili z e x . Se si conosce il valore dello stato, allora la distribuzione è una funzione della sola z e descrive un modello del sensore. Se invece si effettua un'osservazione, la distribuzione e funzione della sola x descrive la probabilità dello stato secondo una gaussiana con media z e varianza σ_z^2 . In quest'ultimo caso essa è la Funzione di Verosimiglianza.

Si assuma di avere una stima precedente dello stato vero $x = x_p$, anch'essa basata sul modello di probabilità Normale, funzione della sola x

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-x_p)^2}{\sigma_x^2}\right)$$

Il teorema di Bayes può essere applicato direttamente per combinare questa informazione precedente con l'informazione del sensore. In una implementazione pratica viene effettuata prima l'osservazione $z = z_p$, il suo valore viene sostituito alla variabile random z nell'Equazione (2-15). Poi le due distribuzioni vengono moltiplicate tra loro per produrre la distribuzione posteriore

$$\begin{aligned} P(x|z) &= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-z_p)^2}{\sigma_z^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-x_p)^2}{\sigma_x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

La costante K è una costante indipendente da x e scelta in modo che la distribuzione posteriore sia normalizzata (secondo l'ipotesi 2. del §2.1.2). La media e la varianza della distribuzione posteriore risultano essere

$$\bar{x} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} z_p + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} x_p$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_x^2 \sigma_z^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right)^{-1}$$

La distribuzione posteriore è perciò anch'essa Gaussiana con una media (valore stimato dello stato) che risulta essere la media pesata tra le medie della distribuzione precedente e di verosimiglianza, e con una varianza (incertezza assegnata alla stima) uguale alla combinazione in parallelo tra le varianze originarie.

Il calcolo del fattore di normalizzazione K non ha in questo caso un'importanza fondamentale poiché, premesso che entrambe le distribuzioni tra loro moltiplicate siano di tipo Gaussiano, ai fini pratici si trascura l'espressione estesa delle distribuzioni passando direttamente al calcolo, noto, della media e della varianza risultante, date le medie e le varianze di partenza. Ai fini della chiarezza si riporta di seguito il calcolo del fattore di normalizzazione K. Sommando gli esponenti delle due distribuzioni si ottiene:

$$P(x|z) = K \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_x^2(x-z_p)^2 + \sigma_z^2(x-x_p)^2}{\sigma_x^2\sigma_z^2}\right)\right)$$

L'argomento dell'esponenziale può essere scritto come

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(x^2 - 2\sigma^2\left(\frac{x_p}{\sigma_x^2} + \frac{z_p}{\sigma_z^2}\right)x + \sigma^2\left(\frac{x_p^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_p^2}{\sigma_z^2}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2 - \bar{x}^2 + \sigma^2\left(\frac{x_p^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_p^2}{\sigma_z^2}\right)\right)}{\sigma^2}$$

In cui è stato aggiunto e sottratto il termine \bar{x}^2 in modo da avere:

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(x - \bar{x}\right)^2 - \bar{x}^2 + \sigma^2\left(\frac{x_p^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_p^2}{\sigma_z^2}\right)\right)$$

Ritornando all'espressione completa della distribuzione:

$$P(x|z) = K \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(x - \bar{x}\right)^2 - \bar{x}^2 + \sigma^2\left(\frac{x_p^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_p^2}{\sigma_z^2}\right)\right)\right)$$

Pertanto il termine noto risulta essere (ricordando che il fattore al denominatore della distribuzione normale deve essere $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$)

$$K = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_x\sigma_z}} \exp\left(\frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_p^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_p^2}{\sigma_z^2}\right)\right)$$

Una volta nota la proprietà simmetrica delle distribuzioni Gaussiane (come dimostrato), ossia che il prodotto di due distribuzioni Gaussiane è ancora una distribuzione Gaussiana con media e varianza

esprese dalle precedenti equazioni, non è necessario effettuare ogni volta i calcoli sulle distribuzioni ma è sufficiente utilizzare direttamente le espressioni già note della media e della varianza risultanti. Questo risultato consente il calcolo in tempo reale in un'implementazione di data fusion basata su questi modelli probabilistici. Più avanti si esporranno i risultati della combinazione, secondo il teorema di Bayes applicato a distribuzioni Gaussiane, delle informazioni di valori vettoriali e non scalari, in cui al posto della varianza si usa la matrice di covarianza.

In Figura 2-4 è riportato l'esempio grafico di quali possono essere, nel caso scalare, la distribuzione precedente, la funzione di verosimiglianza e la distribuzione posteriore. E' evidente che la distribuzione posteriore è ancora di tipo Gaussiano, come ci si aspetta, è situata in posizione interposta tra le altre due distribuzioni (rispetto alle rispettive medie) ed è una campana più stretta avendo una varianza minore delle due varianze originarie.



Figura 2-4: esempio grafico di quali possono essere, nel caso scalare, la distribuzione precedente, la funzione di verosimiglianza e la distribuzione posteriore. La distribuzione posteriore ha come media la media pesata tra le medie originarie e ha una varianza minore di entrambe quelle originarie, infatti possiede un contenuto di informazione maggiore dei singoli contributi.

Esempio 2

Si consideri il caso in cui lo stato x sia una variabile vettoriale continua e sia tale anche il vettore di osservazione z .

Per descrivere quantitativamente la dispersione della variabile aleatoria vettoriale y è necessario calcolare la *matrice di covarianza* definita come

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T$$

dove \bar{y} è il valore medio degli N campioni y_i della variabile y . Se y_i è l' i -esimo campione di y del tipo:

$$y_i = [\eta_i, \xi_i]$$

Allora la matrice di covarianza assume la forma

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & \text{cov}(\eta, \xi) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$$

C è una matrice simmetrica e i suoi termini misti sono non nulli solo se le componenti del vettore y sono tra loro correlate.

Nell'ipotesi che lo stato segua una distribuzione Normale di probabilità, la distribuzione precedente $P(x)$ potrà essere rappresentata con una gaussiana multi-dimensionale del tipo

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^d \det(C_x)}} e^{-\frac{1}{2}(x-x_p)^T C_x^{-1}(x-x_p)}$$

Dove d è la dimensione del vettore e x_p il valor medio.

Se perciò si ipotizza di effettuare un'osservazione $z = z_p$, vettore a due dimensioni per esempio, con un sensore la cui funzione di verosimiglianza relativa z_p abbia matrice di covarianza C_z :

$$P(z|x) = \frac{1}{2\pi \det C_z} e^{-\frac{1}{2}(z_p-x)^T C_z^{-1}(z_p-x)}$$

E' infine possibile calcolare la distribuzione posteriore $P(x|z)$, nello stesso modo dell'esempio precedente ma tenendo conto che le distribuzioni sono a valori vettoriali. Pertanto la distribuzione posteriore sarà ancora gaussiana, con matrice di covarianza pari al parallelo delle matrici di covarianza di partenza, ossia:

$$C = (C_x^{-1} + C_z^{-1})^{-1}$$

L'espressione di C si può scrivere anche in modo più efficiente calcolando una sola inversione matriciale:

$$\begin{aligned} C_x^{-1} + C_z^{-1} &= C_x^{-1} C_z C_z^{-1} + C_z^{-1} = (C_x^{-1} C_z + I) C_z^{-1} = \\ &= (C_x^{-1} C_z + C_x^{-1} C_x) C_z^{-1} = C_x^{-1} (C_z + C_x) C_z^{-1} \end{aligned}$$

Da cui

$$(C_x^{-1} + C_z^{-1})^{-1} = (C_x^{-1} (C_x + C_z) C_z^{-1})^{-1} = C_z (C_x + C_z)^{-1} C_x$$

Quindi

$$C = C_z (C_x + C_z)^{-1} C_x$$

Mentre la media della distribuzione posteriore risulterà essere (analogamente al caso scalare)

$$\bar{x} = C_x (C_x + C_z)^{-1} z_p + C_z (C_x + C_z)^{-1} x_p$$

Graficamente una distribuzione Normale bidimensionale è rappresentata da una campana di Gauss le cui sezioni trasversali sono delle ellissi che rappresentano il luogo dei punti caratterizzati da uguale probabilità. Nella matrice di covarianza sono contenute le informazioni sulle dimensioni degli assi principali delle ellissi (autovalori della matrice) e sulla loro orientazione (autovettori). Un esempio di quello che graficamente corrisponde alle equazioni appena ottenute è riportato in Figura 2-5.

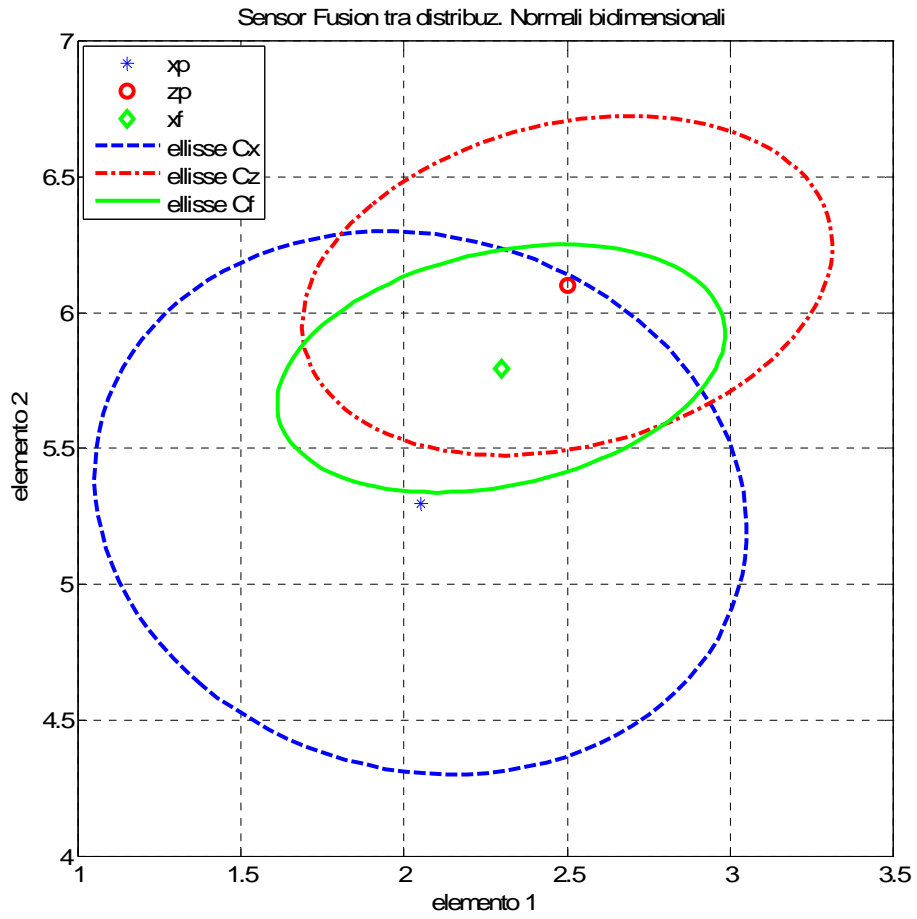


Figura 2-5: Fusione tra la distribuzione di probabilità precedente e la distribuzione di probabilità relativa all'osservazione zp.

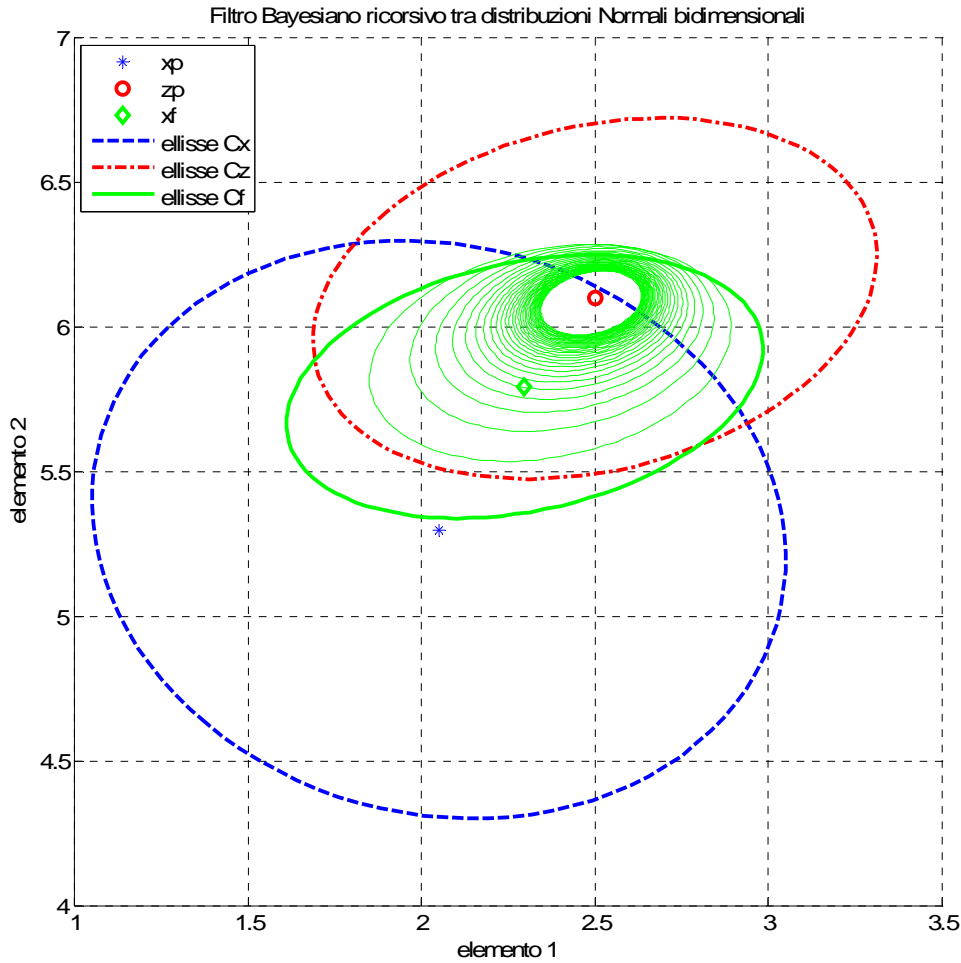


Figura 2-6: Ellissi di equi-probabilità nel caso in cui l'osservazione ottenuta e la relativa ellisse di incertezza restino sempre le stesse. L'ellisse della distribuzione posteriore converge con il proprio centro verso il valore osservato e va riducendosi sempre di più ad ogni iterazione.

In Figura 2-6 si è simulato il caso in cui l'osservazione z_p venga ripetuta 20 volte. Come atteso, l'ellisse della distribuzione posteriore converge con il proprio centro verso il valore osservato e va riducendosi sempre di più ad ogni iterazione nonostante l'ellisse di equiprobabilità dell'osservazione (ottenuto dalla funzione di verosimiglianza) resti sempre lo stesso.

2.1.4. Applicazione del teorema di Bayes al sensor fusion

Il teorema di Bayes si può applicare direttamente alla fusione delle informazioni provenienti da differenti sorgenti (sensori). Ciò che si vuole fare è ottenere la distribuzione posteriore $P(x|Z^n)$ dove $Z^n \triangleq \{z_1 \in Z_1, \dots, z_n \in Z_n\}$ è l'insieme delle osservazioni.

La distribuzione posteriore descrive le probabilità dei vari valori dello stato $x \in X$ data l'informazione ottenuta dalle n osservazioni. In linea di principio, il teorema di Bayes impiegato direttamente per calcolare la funzione di distribuzione fornisce

$$\begin{aligned}
 P(x|Z^n) &= \frac{P(Z^n|x)P(x)}{P(Z^n)} \\
 &= \frac{P(z_1, z_2, \dots, z_n|x)P(x)}{P(z_1, z_2, \dots, z_n)}
 \end{aligned}
 \tag{2-16}$$

In pratica sarebbe difficile applicare questo calcolo perché si dovrebbe conoscere completamente la distribuzione congiunta e condizionata $P(z_1, z_2, \dots, z_n | x)$, cioè la distribuzione congiunta di tutte le possibili combinazioni di osservazioni condizionata allo stato. Si ritiene ragionevole, sotto certe ipotesi, assumere che una volta dato lo stato $x \in X$, l'informazione ottenuta dalla i -esima sorgente di informazione sia indipendente dall'informazione delle altre sorgenti. Grazie a questa assunzione, estendendo la (2-13) al caso di n variabili,

$$P(z_i | x, z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) = P(z_i | x)$$

$$P(z_1, \dots, z_n | x) = P(z_1 | x) \dots P(z_n | x) = \prod_{i=1}^n P(z_i | x) \quad (2-17)$$

Sostituendo la (2-17) nella (2-16),

$$P(x | Z^n) = [P(Z^n)]^{-1} P(x) \prod_{i=1}^n P(z_i | x) \quad (2-18)$$

Quindi la distribuzione posteriore su x , vale a dire le probabilità aggiornate nello stato, sono proporzionali al prodotto della distribuzione di probabilità precedente e alle distribuzioni di probabilità di ciascuna osservazione. La distribuzione marginale $P(Z^n)$ agisce come costante di normalizzazione. L'equazione (2-18) fornisce un metodo semplice per la fusione di informazioni da più sensori ed è chiamata *gruppo indipendente di probabilità*. Nell'implementazione di questo algoritmo, prima di tutto si memorizzano le probabilità condizionate $P(z_i | x)$ come funzioni di entrambe le variabili z_i e x . Quando viene effettuata una sequenza di osservazioni (di sensori diversi ma anche dello stesso sensore) i valori osservati sono sostituiti nelle rispettive distribuzioni di probabilità e si costruiscono le n funzioni di verosimiglianza $\Lambda_i(x)$. Il prodotto di queste funzioni per l'informazione precedente $P(x)$, normalizzato dalla $P(Z^n)$, fornisce l'aggiornamento dell'informazione sullo stato $P(x | Z^n)$ che è funzione della sola x per uno specifico insieme di n osservazioni $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

L'efficacia di questo metodo è basata sull'ipotesi che le osservazioni siano indipendenti tra loro quando condizionate al valore vero dello stato. Tale assunzione è ragionevole se lo stato a cui le osservazioni si riferiscono è la sola cosa che esse hanno in comune, perciò una volta che lo stato sia stato specificato è ragionevole assumere che le informazioni siano condizionalmente indipendenti. Ciò non sarebbe sicuramente corretto senza la condizionalità: sarebbe errato dire che le informazioni sono incondizionalmente indipendenti poiché

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq \prod_{i=1}^n P(z_i)$$

ogni contenuto i -esimo dipende dallo stato comune $x \in X$.

L'ipotesi di indipendenza condizionale non è detto che sia sempre ragionevole, ad esempio nel caso in cui un'osservazione può modificare sensibilmente lo stato.

Esempio 3

Si consideri un esempio di applicazione del teorema di Bayes al sensor fusion tra due sensori per stimare un parametro discreto. L'ambiente di interesse è modellato da un singolo stato x che può assumere uno dei seguenti tre valori:

- x_1 : x è un target di tipo 1;
- x_2 : x è un target di tipo 2;
- x_3 : non ci sono target visibili;

Un singolo sensore osserva x e restituisce tre possibili valori:

- z_1 : osservazione di un target di tipo 1;
- z_2 : osservazione di un target di tipo 2;
- z_3 : nessun target osservato;

Il modello del sensore A è descritto dalla matrice di probabilità:

$$P_A(z_A|x) = \begin{bmatrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.45 & 0.45 & 0.1 \\ x_2 & 0.45 & 0.45 & 0.1 \\ x_3 & 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Il modello del sensore B è descritto dalla matrice di probabilità

$$P_B(z_B|x) = \begin{bmatrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.45 & 0.1 & 0.45 \\ x_2 & 0.1 & 0.45 & 0.45 \\ x_3 & 0.45 & 0.45 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Queste matrici di probabilità sono funzione sia di x che di z . Per un fissato valore vero dello stato esse descrivono la probabilità che venga effettuata una particolare osservazione (questo è il modello del sensore e in tal senso la matrice va letta lungo le sue righe). Quando viene effettuata una particolare osservazione, la matrice descrive la distribuzione di probabilità del valore vero dello stato (questa è la funzione di verosimiglianza e in tal senso la matrice va letta lungo le sue colonne).

La distribuzione posteriore dello stato x condizionata all'osservazione $z_A = z_i$, effettuata ad esempio dal sensore A, è data da

$$P(x|z_{A,i}) = k \times P_A(z_i|x)P(x)$$

Dove k è il fattore di normalizzazione definito dalla condizione che la somma delle probabilità della variabile x sia unitaria.

Se assumiamo di non avere nessuna conoscenza precedente circa lo stato:

$$P(x) = [1/3, 1/3, 1/3] \approx [0.333, 0.333, 0.333]$$

Supponendo che venga resa disponibile l'osservazione $z_A = z_1$ dal sensore A, in tal caso la distribuzione posteriore sarà data dalla prima colonna della matrice di probabilità del sensore A (la notazione \otimes indica il prodotto elemento per elemento), cioè la funzione di verosimiglianza per l'osservazione $z_A = z_1$

$$\begin{aligned} P(x|z_{A,1}) &= k \times P_A(z_1|x)P(x) \\ &= k \times (0.45, 0.45, 0.1) \otimes (0.333, 0.333, 0.333) = (0.45, 0.45, 0.1) \end{aligned}$$

Se successivamente usiamo la distribuzione posteriore come distribuzione precedente per la fusione con una nuova osservazione del sensore A, $P(x) = (0.45, 0.45, 0.1)$, e viene resa disponibile una nuova osservazione, supponiamo ancora una volta $z_A = z_1$, la nuova distribuzione posteriore sarà:

$$\begin{aligned} P(x|z_{A,1}) &= k \times P_A(z_1|x)P(x) \\ &= k \times (0.45, 0.45, 0.1) \otimes (0.45, 0.45, 0.1) = (0.488, 0.488, 0.024) \end{aligned}$$

Riassumendo, nel caso in cui vengano fatte due osservazioni successive z_1 del sensore A, l'algoritmo di fusione delle informazioni porta ad aumentare la probabilità che uno dei due target sia presente a scapito dell'ipotesi di nessun target visibile.

Dall'osservazione delle matrici di probabilità dei due sensori appare evidente che mentre il sensore A è più efficace nello stimare la presenza di un target ma meno ad osservarne la presenza, il sensore B per contro è più efficace nel distinguere il tipo di target ma meno efficace a dire se il target è visibile o meno. Allora viene spontaneo utilizzare le informazioni di entrambi i sensori e combinarle tra loro in modo da ottenere un'informazione più completa e stimare con maggior probabilità se il target è visibile o meno e di che tipo di target si tratta.

Supponiamo dunque di avere una distribuzione precedente uniforme come nel caso precedente. Se osserviamo $z_A = z_1$ con il sensore A e $z_B = z_1$ con il sensore B, la distribuzione posteriore in x sarà

$$\begin{aligned} P(x|z_{A,1}, z_{B,1}) &= k \times P_{AB}(z_1, z_1|x) \times P(x) \\ &= k \times P_A(z_1|x)P_B(z_1|x) \\ &= k \times (0.45, 0.45, 0.1) \otimes (0.45, 0.1, 0.45) = (0.6924, 0.1538, 0.1538) \end{aligned}$$

Comparando questo risultato con il risultato del caso precedente in cui si effettuano due misure col sensore A è evidente come il sensore B fornisca una sostanziale informazione aggiuntiva sulla discriminazione del tipo di target a spese di una leggera perdita di efficacia nell'individuazione del target.

Ripetendo il calcolo per ciascuna coppia di osservazioni, risultano le seguenti matrici di probabilità

$$z_A = z_1 \begin{bmatrix} z_B = & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.692 & 0.154 & 0.488 \\ x_2 & 0.154 & 0.692 & 0.488 \\ x_3 & 0.154 & 0.154 & 0.024 \end{bmatrix}$$

$$z_A = z_2 \begin{bmatrix} z_B = & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.692 & 0.154 & 0.488 \\ x_2 & 0.154 & 0.692 & 0.488 \\ x_3 & 0.154 & 0.154 & 0.024 \end{bmatrix}$$

$$z_A = z_3 \begin{bmatrix} z_B = & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.108 & 0.024 & 0.265 \\ x_2 & 0.0241 & 0.108 & 0.265 \\ x_3 & 0.868 & 0.868 & 0.471 \end{bmatrix}$$

Da cui risulta che la prestazione generale del sistema di osservazione è migliorata in ciascuno dei casi possibili. Se infatti si osserva un target di tipo 2 con il secondo sensore dopo aver osservato un target di tipo 1 con il primo sensore, la distribuzione posteriore risulta $P(x|z_{A,1}, z_{B,2}) = (0.154, 0.692, 0.154)$ che migliora l'individuazione del target 2. Se, ad ulteriore conferma dell'efficacia, non osserviamo nessun target con il secondo sensore e osserviamo un target di tipo 1 con il primo sensore, la distribuzione posteriore risulta $(0.488, 0.488, 0.024)$. Ossia si stima ancora bene che è visibile un target sebbene non si sappia quale in quanto il secondo sensore non è stato in grado di distinguerlo. Se poi il sensore A osservasse che non è visibile nessun target mentre il sensore B osserva il target di tipo 2, la distribuzione posteriore è $(0.108, 0.024, 0.868)$, il che indica che comunque si stima che non ci sia nessun target nonostante l'osservazione del sensore B, che però contiene poca informazione in quanto non è in grado di effettuare una buona individuazione del target ma solo a distinguere tra i due tipi di target.

2.1.5. Filtro Bayesiano ricorsivo

La fusione delle informazioni di più osservazioni o di più sensori che utilizza l'Equazione (2-18) richiederebbe, in linea di principio, di memorizzare tutta l'informazione passata e, all'arrivo di una nuova k-esima informazione nella forma $P(z_k|x)$, di ricalcolare la probabilità complessiva aggiornata. Il teorema di Bayes si presta facilmente all'implementazione ricorsiva o incrementale. Considerando infatti che si può scrivere $Z^k \triangleq \{z_k, Z^{k-1}\}$ e assumendo l'indipendenza condizionale delle osservazioni,

$$\begin{aligned} P(x, Z^k) &= P(x|Z^k)P(Z^k) \\ &= P(z_k, Z^{k-1}|x)P(x) \\ &= P(z_k|x)P(Z^{k-1}|x)P(x) \end{aligned}$$

Eguagliando i termini agli estremi di quest'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} P(x|Z^k)P(Z^k) &= P(z_k|x)P(Z^{k-1}|x)P(x) \\ &= P(z_k|x)P(x|Z^{k-1})P(Z^{k-1}) \end{aligned}$$

Ricordando che $P(Z^k)/P(Z^{k-1}) = P(z_k|Z^{k-1})$,

$$P(x|Z^k) = \frac{P(z_k|x)P(x|Z^{k-1})}{P(z_k|Z^{k-1})} \quad (2-19)$$

Il vantaggio di questo algoritmo ricorsivo è che ad ogni passo di iterazione è sufficiente calcolare e memorizzare solo la distribuzione posteriore $P(x|Z^k)$ la quale contiene una sintesi completa di tutte le informazioni passate. Quando si dispone di una nuova osservazione e quindi di una nuova funzione di probabilità $P(z_k|x)$, la distribuzione posteriore diventa quella precedente e le due funzioni, moltiplicate tra loro, diventano, dopo averne normalizzato il prodotto, la nuova distribuzione posteriore.

Esempio 4

Volendo applicare il filtro Bayesiano ricorsivo al caso di data fusion dell'Esempio 1, la media e la varianza della distribuzione posteriore aggiornata al passo k, si possono calcolare immediatamente e risultano essere:

$$x_k = \frac{\sigma_{k-1}^2}{\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2} z_k + \frac{\sigma^2}{\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2} x_{k-1}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\sigma_{k-1}^2 \sigma^2}{\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2} = \left(\frac{1}{\sigma_{k-1}^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}$$

Dove σ^2 è la varianza associata alla nuova osservazione z_k , σ_{k-1}^2 è la varianza associata alla distribuzione precedente.

2.1.6. Il filtro di Kalman

Tutti i problemi di data fusion includono una fase di stima. Dato un certo numero di misure (osservazioni) provenienti da un gruppo di sensori, vogliamo usare le informazioni ottenute per ottenere una stima che sia migliore di ognuna delle singole misure in termini probabilistici, dello stato di interesse. Uno stimatore è una regola decisionale che, data in ingresso una sequenza di misure di una grandezza di interesse, calcola il valore di quella grandezza (parametro, stato di un sistema, misurando). Il filtro di Kalman è un *algoritmo ottimo ricorsivo di elaborazione dati, o stimatore lineare ricorsivo*. La definizione di ottimo è riferita, sotto le ipotesi su cui si basa, alle prestazioni del filtro di Kalman rispetto a quelle di qualsiasi altro possibile algoritmo di data fusion [10]. Esso elabora tutte le misure disponibili, qualsiasi sia la loro accuratezza, per stimare il valore corrente delle variabili di interesse. Ad esempio, supponiamo di voler misurare la velocità di un veicolo e di avere a disposizione le misure provenienti da un laser a triangolazione o da un gruppo di sensori odometrici o da una piattaforma inerziale (accelerometri e giroscopi). Piuttosto che essere costretti a scegliere solo una di queste misure e ignorare tutte le altre, è possibile costruire un filtro di Kalman che prenda in ingresso tutte le misure disponibili e combini tra loro le informazioni contenute in ciascun dato, compresa la conoscenza del modello dello strumento che lo ha fornito. Il risultato in uscita sarà una migliore stima della velocità.

Il termine *ricorsivo* è fondamentale per un'implementazione al calcolatore del filtro di Kalman, esso indica infatti che l'algoritmo non richiede la memorizzazione e la rielaborazione di tutta la storia dei dati ogni volta che è disponibile una nuova misura.

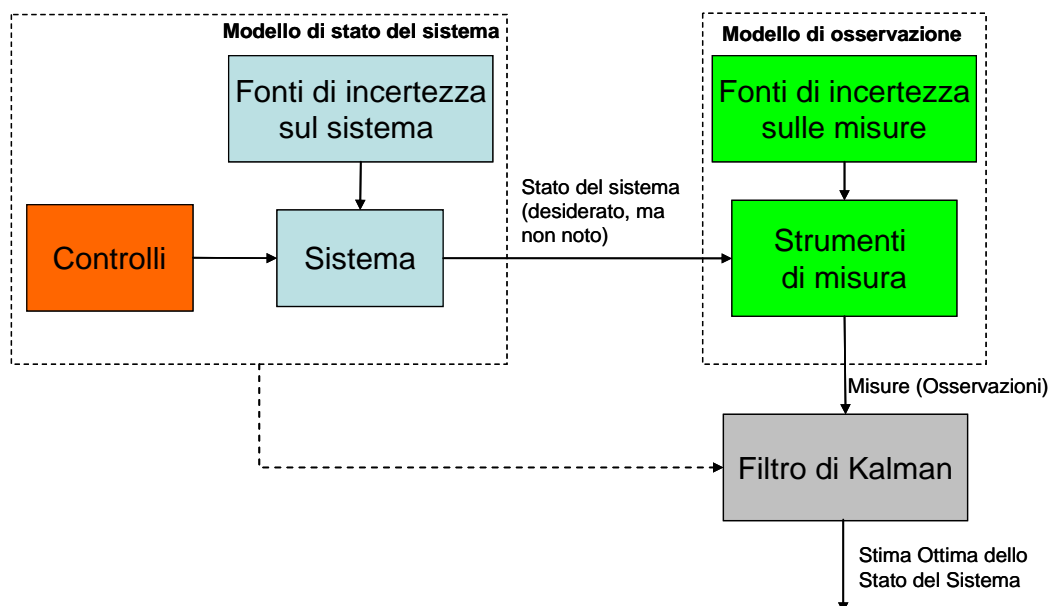


Figura 2-7: Schema a blocchi di una possibile applicazione del filtro di Kalman

La Figura 2-7 rappresenta una tipica applicazione in cui si può utilizzare il filtro di Kalman. Il sistema osservato può essere o meno asservito da alcuni input di controllo e gli strumenti di misura forniscono in output le informazioni per la retroazione e in generale per stimare certe variabili di interesse del sistema. La conoscenza di questi ingressi (controlli) e uscite (misure) è l'unica cosa disponibile del sistema fisico che può essere utilizzata per effettuare una stima ottima dello stato del sistema. Le fonti di incertezza sul sistema o *incertezza di modello* derivano dalla non completa conoscenza di tutte le variabili che influiscono sulla dinamica del sistema. Le fonti di incertezza sulle misure comprendono la non perfetta conoscenza di quali sono le relazioni tra le variabili di stato e le uscite misurate (incertezza di modello degli strumenti) e l'incertezza dovuta agli errori casuali e sistematici dei vari strumenti. E' perciò necessario un metodo per estrarre l'informazione utile dai segnali rumorosi. Ci possono essere diversi strumenti con differente caratteristica dinamica e di accuratezza che forniscono misure di una stessa variabile; è desiderabile, quando non necessario, un metodo per combinare tra loro le uscite dei vari strumenti per produrre una stima delle variabili di interesse in modo da minimizzare gli errori in senso statistico. Il concetto di filtro ottimo che definisce il filtro di Kalman è inteso in senso statistico ed equivale a dire che, se applicassimo dei filtri di prova molte volte per la stessa applicazione, allora la media dei risultati del filtro di Kalman sarebbe migliore della media dei risultati di qualsiasi filtro di prova.

Per minimizzare gli errori in senso probabilistico, ossia in senso Bayesiano, si vuole che il filtro propaghi la densità di probabilità condizionata del misurando (grandezza di interesse), condizionata alla conoscenza delle misure attuali degli strumenti. Ad esempio, la densità di probabilità indicata come $f_{x(i)|z(1),z(2),\dots,z(i)}(x|z_1,z_2,\dots,z_i)$ è la funzione che descrivere la probabilità che il misurando (supponiamo sia uno scalare) $x \in X$ assuma un particolare valore all'interno di X (per esempio, $X \equiv \mathbb{R}$) all'istante i ($x(i)$); questa probabilità sia condizionata alla conoscenza che il vettore delle misure $z(1)$ all'istante 1 assuma il valore z_1 e così via per l'istante 2 fino a i . Si supponga, ad esempio, che $x(i)$ sia la posizione mono-dimensionale di un veicolo all'istante di tempo i , e che $z(j)$ sia il vettore bi-dimensionale delle misure della posizione al tempo j provenienti da due sensori laser. Tale densità di probabilità condizionata contiene tutta l'informazione disponibile su $x(i)$: essa indica, per ogni dato valore di tutte le misure ottenute fino all'istante i , qual è la probabilità che il misurando abbia un dato valore o intervallo di valori $x(i)$. La forma del grafico della funzione f contiene tutta l'informazione riguardo all'incertezza sul valore di x : se è configurata come un picco stretto e alto allora il maggior contenuto di probabilità si concentra in un intervallo ristretto di valori di x , se invece è configurata con un andamento poco pendente, l'incertezza su x è più elevata e la sua probabilità è distribuita in un intervallo più ampi di valori.

La stima ottima si ottiene direttamente una volta che sia stata propagata la densità condizionata poiché quest'ultima contiene le informazioni necessarie a scegliere un valore ottimo per il misurando. Possibili candidati alla scelta sono la *media*, la *moda* e la *mediana*. Tali valori, nel caso del filtro di Kalman, coincidono; infatti la propagazione della densità di probabilità condizionata avviene sotto le ipotesi che:

- il sistema sia descritto da un modello *lineare*
- il rumore associato al sistema e alle misure sia *bianco* e *Gaussiano* (ossia a media nulla, con densità di potenza spettrale distribuita uniformemente su tutta la banda di frequenze e con distribuzione di probabilità Normale).

Sotto queste tre ipotesi restrittive il filtro di Kalman è definito ottimo nel senso descritto sopra.

Ipotesi troppo restrittive?

Solo a prima a vista le tre ipotesi su cui si costruisce il filtro di Kalman possono sembrare troppo restrittive e poco aderenti alla realtà.

Il modello di sistema lineare è giustificabile per varie ragioni. Spesso un modello lineare si adatta bene allo scopo e, in presenza di non linearità, l'approccio ingegneristico più utilizzato è

quello della linearizzazione del modello attorno a una qualche configurazione del sistema, ad esempio un punto o una traiettoria. I sistemi lineari sono maggiormente auspicabili perchè sono più facilmente gestibili con strumenti ingegneristici e la teoria dei sistemi lineari è molto più completa e pratica di quelli non lineari. Esistono poi dei metodi per estendere l'applicazione del filtro di Kalman ai sistemi non lineari qualora i modelli lineari dovessero rivelarsi inadeguati.

L'ipotesi di rumore bianco implica che i valori di rumore non sono correlati tra di loro nel tempo. In pratica, se si conosce quanto vale il rumore all'istante attuale, ciò non aggiunge nessuna informazione ai fini di una previsione su quale sarà il suo valore in un altro istante. Un rumore bianco ha uno spettro con uguale densità di potenza per tutte le frequenze. Ciò implica che un tale segnale ha potenza infinita, pertanto un rumore bianco non può esistere in natura. Poiché però ogni sistema fisico ha una banda passante limitata nello spazio delle frequenze ed è tipicamente affetto da un rumore a larga banda, dal punto di vista del sistema è equivalente ad assumere che vi sia rumore bianco giacchè questo, all'interno della banda passante del sistema, è identico al rumore reale a banda larga e al di fuori della banda passante il rumore non ha influenza sul sistema. L'assunzione di rumore bianco semplifica notevolmente la matematica utilizzata nel filtro di Kalman e non aggiunge restrizioni al modello del sistema se questo è affetto da rumore a banda larga. Se invece all'interno della banda passante del sistema il rumore non ha densità spettrale uniforme oppure è correlato nel tempo, attraverso un filtro aggiuntivo è possibile riprodurre, partendo da un rumore bianco, qualsiasi forma di rumore correlato (il filtro consiste in un piccolo sistema lineare chiamato "*shaping filter*").

Mentre l'attributo "bianco" per un rumore è riferito alle sue caratteristiche temporali (o di frequenza), l'attributo "Gaussiano" è riferito alla sua ampiezza. Cioè, per ogni singolo istante temporale, la densità di probabilità dell'ampiezza di un rumore Gaussiano ha la nota forma di una campana. Questa assunzione è giustificata in senso fisico dal fatto che, tipicamente, vi è un gran numero di piccole sorgenti che contribuiscono a creare il rumore di misura. Matematicamente questo fenomeno è descritto dal teorema del limite centrale: all'aumentare del numero di variabili casuali indipendenti che si sommano tra loro, qualunque sia la distribuzione di probabilità di ciascuna, la distribuzione di probabilità della somma tende ad essere quella Gaussiana. Oltre a questa giustificazione se ne può aggiungere una di ordine pratico. Di solito di una variabile affetta da rumore si conoscono solo le statistiche del primo e del secondo ordine, rispettivamente la media e la varianza (o la deviazione standard), in tal caso, cioè quando non si conoscono altre statistiche di ordine superiore al secondo, non vi è altra distribuzione da assumere migliore di quella Gaussiana. Una Gaussiana è determinata completamente una volta noti i due parametri di media e varianza, a differenza di molte distribuzioni che richiedono la conoscenza di un numero anche infinito di statistiche. Il filtro di Kalman, che propaga la media e la varianza, include tutte le informazioni contenute nella densità di probabilità condizionata piuttosto che soltanto alcune di esse, come succederebbe con un'altra forma di distribuzione di probabilità. Le ipotesi su cui si basa il filtro di Kalman sarebbero eccessivamente restrittive in alcuni casi se l'obiettivo fosse quello di volere costruire un modello del sistema che si avvicini il più possibile alla realtà, quindi abbandonando le ipotesi di linearità e di rumore bianco e Gaussiano. L'obiettivo è invece quello di costruire un buon algoritmo stimatore (o di controllo), in tal caso le ipotesi fatte consentono di ottenere spesso una rappresentazione del sistema adeguata allo scopo e di utilizzare strumenti matematici facilmente trattabili. L'esigenza è quindi che il modello sia efficiente per effettuare una buona stima dei parametri di interessi, e tale esigenza condiziona anche l'estensione del modello a casi di maggior applicabilità e in cui le ipotesi citate non siano più valide.

Esempio 5

Viene riportato un semplice esempio di applicazione del filtro di Kalman al caso della stima di una singola variabile, si supponga sia la posizione monodimensionale di un'automobile ovvero la sua posizione nel caso di traiettoria rettilinea; questo esempio consente di trattare il problema in modo intuitivo anche includendo il caso dinamico in cui il misurando varia nel tempo.

Si supponga di viaggiare su un percorso rettilineo e di non conoscere la propria posizione. A un certo istante t_1 si effettua un'osservazione z_1 della propria posizione stimandola ad esempio in base alla conoscenza, più o meno accurata, del tempo trascorso dalla partenza e della velocità media. Il risultato di questa misura sarà certamente affetto da un'incertezza che viene stimata e rappresentata dalla deviazione standard (la statistica del secondo ordine è la varianza $\sigma_{z_1}^2$). Si dispone perciò della funzione $f_{x(t_1)|z_1}(x|z_1)$ che rappresenta la distribuzione di probabilità condizionata della posizione al tempo t_1 , $x(t_1)$, condizionata al valore osservato z_1 . Se la distribuzione è Gaussiana la deviazione standard σ_{z_1} è una misura diretta dell'incertezza della misura z_1 , ed è tale per cui la probabilità che il valore vero di x si trovi nell'intervallo centrato in z_1 e con semi-ampiezza σ_{z_1} è pari al 68.3%. Parlando in termini di probabilità Bayesiana, se si suppone che la *distribuzione precedente* di $x(t_1)$ sia rettangolare con uguale probabilità per qualsiasi valore di x , la *distribuzione posteriore* dopo la misura (osservazione) z_1 , sarà Gaussiana con varianza della stima:

$$\sigma_x^2(t_1) = \sigma_{z_1}^2$$

E la migliore stima della posizione sarà:

$$\hat{x}(t_1) = z_1$$

Si supponga poi di poter disporre della misura di posizione tramite GPS o, meglio ancora, DGPS, al tempo $t_2 \cong t_1$ (in modo che non sia cambiata la posizione del veicolo in modo apprezzabile), ottenendo una misura z_2 con varianza $\sigma_{z_2}^2$ inferiore a $\sigma_{z_1}^2$. A questo punto si dispone di un'ulteriore osservazione dello stato, cioè una seconda, più accurata, misura della posizione. Come visto nei paragrafi precedenti, un metodo per combinare tra loro in termini probabilistici due misure della stessa variabile con le rispettive distribuzioni di probabilità, è quello di fonderle in modo Bayesiano. Come visto nell'Esempio 1, se si considera la stima effettuata all'istante t_1 come stima precedente ($P(x)$) e si vuole ottenere una migliore stima dopo l'osservazione t_2 , per ottenere la distribuzione posteriore, ossia la stima aggiornata, basta moltiplicare tra loro la funzione di distribuzione precedente e quella dell'osservazione attuale. Nel caso di distribuzioni Gaussiane non occorre moltiplicare tra loro le funzioni densità originarie in quanto le statistiche del primo e secondo ordine, media e varianza, si ottengono direttamente da quelle delle stime di partenza. In alternativa si può applicare il metodo di filtraggio ricorsivo secondo l'Esempio 3. Il risultato della densità di probabilità della posizione $x(t_2)$, condizionata ad entrambe le misure effettuate agli istanti $t_1 \cong t_2$, z_1 e z_2 , è la distribuzione Gaussiana con media μ e varianza σ^2 date da:

$$\mu = \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_2$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{z_2}^2} \right)^{-1}$$

La varianza risultante è inferiore ad entrambe le varianze originarie e ciò equivale a dire che l'incertezza nella stima di posizione è diminuita dopo la combinazione delle misure di partenza.

La migliore stima aggiornata è:

$$\hat{x}(t_2) = \mu$$

con varianza associata

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma^2.$$

Questa stima è quella con la massima probabilità, il valore ottimizzato ai minimi quadrati. Si noti che, supponendo che la misura z_2 sia molto più accurata di z_1 , cioè che $\sigma_{z_2}^2 \ll \sigma_{z_1}^2$, la varianza di questa stima combinata è comunque minore di $\sigma_{z_2}^2$; si deduce che, anche se una misura contiene poca informazione, comunque aumenta l'accuratezza del risultato del filtro.

Si può scrivere, manipolando l'ultima equazione scritta sopra,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_2) &= \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_2 \\ &= z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} (z_2 - z_1)\end{aligned}$$

e, ricordando che $\hat{x}(t_1) = z_1$, nella forma classica in cui il filtro di Kalman è implementato:

$$\hat{x}(t_2) = \hat{x}(t_1) + K(t_2)[z_2 - \hat{x}(t_1)] \quad (2-20)$$

dove

$$K(t_2) = \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} \quad (2-21)$$

Osservando le ultime due equazioni si evince che la stima ottima al tempo t_2 , $\hat{x}(t_2)$, è uguale alla migliore previsione del suo valore prima che sia disponibile la misura z_2 , $\hat{x}(t_1)$, sommata a un termine correttivo costituito dal prodotto di un coefficiente di combinazione ottima per la differenza tra z_2 e la migliore previsione del suo valore prima che questo sia effettivamente disponibile, $\hat{x}(t_1)$. Questo filtro ha pertanto una funzione detta di "predittore-correttore". Sulla base di tutte le precedenti informazioni, viene fatta una previsione del valore che le variabili di interesse e le misure a loro associate avranno nel prossimo istante di misura. Quando viene effettuata la prossima misura la differenza tra quest'ultima e il suo valore previsto è usata per correggere la previsione delle variabili di interesse.

La varianza della stima ottima può essere riscritta come:

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma_x^2(t_1) - K(t_2)\sigma_x^2(t_1)$$

E' importante notare che i valori $\hat{x}(t_2)$ e $\sigma_x^2(t_2)$ includono tutte le informazioni della funzione $f_{x(t_2)|z(t_1),z(t_2)}(x|z_1,z_2)$, il che equivale a dire che la densità di probabilità condizionata si ottiene propagando queste due variabili. Inoltre la soluzione di questo problema di fusione in caso statico con il filtro di Kalman è esattamente equivalente a quella che si otterrebbe applicando un filtro Bayesiano ricorsivo.

Consideriamo lo stesso problema nel caso *dinamico*.

Si supponga che il veicolo in questione percorra un certo tratto prima che sia disponibile una nuova misura di posizione di qualsiasi tipo. Si assume un modello di stato a velocità costante per il sistema della forma:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \xi$$

Dove v_0 è una velocità nominale e ξ è un termine di rumore usato per rappresentare l'incertezza nella conoscenza del valore reale della velocità a causa dei disturbi da cui è affetta, di condizioni non nominali, di

effetti non considerati nell'equazione differenziale semplice del primo ordine, etc. Il rumore ξ è modellato come rumore Gaussiano bianco con media nulla e varianza σ_ξ^2 .

La densità di probabilità condizionata, date z_1 e z_2 , all'istante t_2 è identica a quella ottenuta sopra. Al trascorrere del tempo, mentre il veicolo procede a velocità nominale v_0 , l'incertezza dovuta al rumore sulla velocità aumenta e la funzione densità resta una Gaussiana centrata nei valori di $x(t)$ via via stimati dal modello di stato, ma è caratterizzata da una varianza sempre maggiore, ossia è rappresentata da una campana sempre più larga e schiacciata. In altri termini, la densità di probabilità, immaginata scorrere sull'asse delle x all'aumentare del tempo, parte all'istante t_2 dalla stima ottima e si muove con velocità nominale secondo il modello dinamico allargandosi nel tempo perché si è sempre meno sicuri della posizione esatta del veicolo a causa dell'accumularsi di incertezza nel tempo. All'istante t_3^- , subito prima che sia disponibile una nuova misura all'istante t_3 , la densità di probabilità $f_{x(t_3)|z(t_1),z(t_2)}(x|z_1,z_2)$ è una Gaussiana caratterizzata dalle seguenti media e varianza:

$$\hat{x}(t_3^-) = \hat{x}(t_2) + v_0(t_3 - t_2) \quad (2-22)$$

$$\sigma_x^2(t_3^-) = \sigma_x^2(t_2) + \sigma_\xi^2(t_3 - t_2) \quad (2-23)$$

La media si ottiene tramite semplice integrazione della velocità nominale nel tempo, secondo il modello. La varianza $\sigma_x^2(t_3^-)$ si ottiene propagando la varianza della stima ottima $\sigma_x^2(t_2)$ tra l'istante t_2 e l'istante t_3 , o meglio calcolando l'incertezza sul valore di $\hat{x}(t_3^-)$ tramite la formula di Kleine e McClintock applicata alla prima delle due equazioni riportate sopra e supponendo che la misura di tempo non sia affetta da errori.

$\hat{x}(t_3^-)$ è la **previsione** ottima di quale sarà il valore di x all'istante t_3^- , prima che sia effettuata una misura all'istante t_3 , e $\sigma_x^2(t_3^-)$ è la varianza attesa in questa previsione.

All'istante t_3 viene effettuata una misura (ad esempio con GPS) z_3 con varianza $\sigma_{z_3}^2$. A questo punto si dispone di due densità di probabilità, una comprendente tutta la precedente informazione disponibile prima dell'ultima misura effettuata, l'altra contenente l'informazione della misura stessa. Secondo le assunzioni fatte nel §2.1.4 le misure sono condizionatamente indipendenti tra loro. Allo stesso modo del caso statico, si combinano tra loro le due densità condizionate di probabilità producendo una distribuzione ancora Gaussiana con media

$$\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + K(t_3)[z_3 - \hat{x}(t_3^-)] \quad (2-24)$$

e varianza

$$\sigma_x^2(t_3) = \sigma_x^2(t_3^-) - K(t_3)\sigma_x^2(t_3^-) \quad (2-25)$$

Dove il guadagno $K(t_3)$ è dato da

$$K(t_3) = \frac{\sigma_x^2(t_3^-)}{\sigma_x^2(t_3^-) + \sigma_{z_3}^2} \quad (2-26)$$

Questa seconda fase del filtro, in cui si calcolano la stima e la sua varianza a valle di tutte le informazioni disponibili, ossia quando si dispone dell'ultima misura, della sua varianza e della precedente previsione di stima e varianza, è detta **aggiornamento**.

L'espressione della stima ottima $\hat{x}(t_3)$ nel caso dinamico ha la stessa forma di quella che si è ottenuta nel caso statico, la differenza tra le due applicazioni del filtro è che nel caso dinamico si introduce la stima ottenuta dal modello del sistema per effettuare la previsione sulle variabili di interesse e sulle misure negli istanti in cui esse non sono disponibili, in questo intervallo di tempo l'incertezza della stima ottima, corretta

nell'istante in cui si è ottenuta una misura, viene propagata fino all'istante in cui è disponibile una nuova misura.

È interessante osservare l'espressione del guadagno $K(t_3)$. Se $\sigma_{z_3}^2$, la varianza del rumore di misura, è grande, allora il guadagno $K(t_3)$ è piccolo; semplicemente ciò significa che viene data poca confidenza a una misura molto rumorosa che perciò viene pesata poco nella fase di correzione del filtro. Se al limite $\sigma_{z_3}^2$ tendesse ad infinito il guadagno del filtro sarebbe nullo, la misura sarebbe ignorata e verrebbe tenuta in considerazione solo la stima del modello. Viceversa, se il rumore della stima del modello σ_x^2 ha varianza elevata, oppure se è trascorso troppo tempo dall'ultima misura anche se il modello è accurato, $\sigma_x^2(t_3^-)$ sarà elevata e così anche il guadagno, perciò verrà data molta confidenza alla misura. Se al limite $\sigma_x^2(t_3^-) \rightarrow \infty$, allora $K(t_3) \rightarrow 1$ e perciò $\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + 1 \cdot [z_3 - \hat{x}(t_3^-)] = z_3$. In questo caso l'output del modello viene ignorato e la stima ottima coincide con la misura.

2.1.6.1. Algoritmo del filtro di Kalman

Si è detto che il filtro di Kalman è uno stimatore lineare ricorsivo: calcola, ad istanti consecutivi, la stima di uno stato (misurando, a valori scalari o vettoriali) a valori continui che si evolve nel tempo, sulla base di osservazioni (misure) periodiche dello stato. Il filtro utilizza un modello statistico di come il vettore di interesse, lo stato $x(t)$, si evolve nel tempo e un modello statistico di come le osservazioni $z(t)$ sono legate a questo vettore di interesse. Il primo di questi modelli è costruito a partire dal modello di stato del sistema, lineare o linearizzato (filtro di Kalman "esteso"); il secondo modello statistico è costruito a partire dal modello di osservazione che include il modello dello strumento/i di misura impiegato/i. I guadagni del filtro di Kalman sono scelti in modo che, sotto le ipotesi fatte sulle osservazioni e sul processo di stato, la stima risultante $\hat{x}(t)$ sia tale da minimizzare l'errore quadratico medio definito da

$$L(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t)) P(x(t) | Z^t) dx$$

Se si differenzia $L(t)$ rispetto a $\hat{x}(t)$ e si pone l'espressione uguale a zero si ottiene il valore di $\hat{x}(t)$ che minimizza $L(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{d\hat{x}(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\hat{x}(t)} [(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t)) P(x(t) | Z^t)] dx = 0 \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 2(\hat{x}(t) - x(t)) P(x(t) | Z^t) dx &= 0 \Rightarrow \hat{x}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} P(x(t) | Z^t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) P(x(t) | Z^t) dx \end{aligned}$$

E poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x(t) | Z^t) dx = 1$,

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) P(x(t) | Z^t) dx$$

Quindi il valore ottenuto non è altro che la media condizionata $E(x(t) | Z^t)$, cioè il valore atteso dello stato all'istante t condizionato alla sequenza di osservazioni Z^t effettuate fino a quell'istante.

Nel §2.1.1 sono stati descritti i modelli di stato e osservazione a tempo continuo. Tuttavia il filtro di Kalman essendo implementato in un calcolatore, è costruito per passi discreti di tempo in

modo iterativo, perciò anche i modelli di stato e osservazione devono essere trasformati in forma discreta prima dell'implementazione del filtro. Supponendo passi di integrazione (campionamento, per la misura), costanti, si utilizzano le equazioni di modello (2-5) e (2-6).

L'ipotesi di base per il filtro di Kalman in cui si assume che il rumore del processo di evoluzione dello stato e il rumore di misura siano a *media nulla* e *temporalmente scorrelati* si traduce rispettivamente con le equazioni

$$E\{v_k\} = E\{w_k\} = 0, \quad \forall k$$

$$E\{v(i)v(j)^T\} = \delta_{ij} \cdot Q(i), \quad E\{w(i)w(j)^T\} = \delta_{ij} \cdot R(i)$$

in cui l'operatore $E\{\cdot\}$ è quello che calcola il valore atteso di una variabile casuale (ovvero la media). δ_{ij} è l'operatore di Kronecker e indica che le *matrici di covarianza* Q e R , rispettivamente del rumore v e w , sono non nulle solo se il valore atteso è calcolato rispetto a un solo istante temporale i e non a due istanti diversi.

Si indica con $\hat{x}(k|k)$ la stima dello stato all'istante k condizionata a tutte le informazioni ottenute fino all'istante k . La stima dello stato all'istante k condizionata alle sole informazioni ottenute fino all'istante $k-1$ è detta *previsione* di un passo in avanti e si indica con $\hat{x}(k|k-1)$, questa simbologia è estesa a tutti gli altri parametri dell'algoritmo. Si assume che al passo k -esimo siano noti i seguenti parametri:

- la stima $\hat{x}(k-1|k-1)$
- la covarianza condizionata (varianza per variabili scalari) $P(k-1|k-1)$

Il filtro di Kalman consiste nella ricorsione di due stadi:

Previsione

Si calcola una previsione $\hat{x}(k|k-1)$ dello stato all'istante k e la sua covarianza $P(k|k-1)$:

$$\hat{x}(k|k-1) = F(k)\hat{x}(k-1|k-1) + B(k)u(k) \quad (2-27)$$

$$P(k|k-1) = F(k)P(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k) \quad (2-28)$$

Aggiornamento

All'istante k viene resa disponibile un'osservazione $z(k)$. Si calcola dunque la stima aggiornata $\hat{x}(k|k)$ dello stato $x(k)$ insieme alla covarianza aggiornata $P(k|k)$ a partire dalla previsione appena calcolata:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + W(k)[z(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1)] \quad (2-29)$$

$$P(k|k) = [1 - W(k)H(k)]P(k|k-1)[1 - W(k)H(k)]^T + W(k)R(k)W^T(k) \quad (2-30)$$

dove la matrice guadagno $W(k)$ è data da

$$W(k) = P(k|k-1)H(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (2-31)$$

Il filtro di Kalman è un ciclo ricorsivo (vedi Figura 2-8). La condizione di partenza è una stima ottenuta in qualche modo attraverso le conoscenze che si hanno del misurando fino all'istante

iniziale del ciclo, dopo di che si effettua una previsione, in ultimo si utilizza la misura per aggiornare la previsione e produrre una nuova stima .

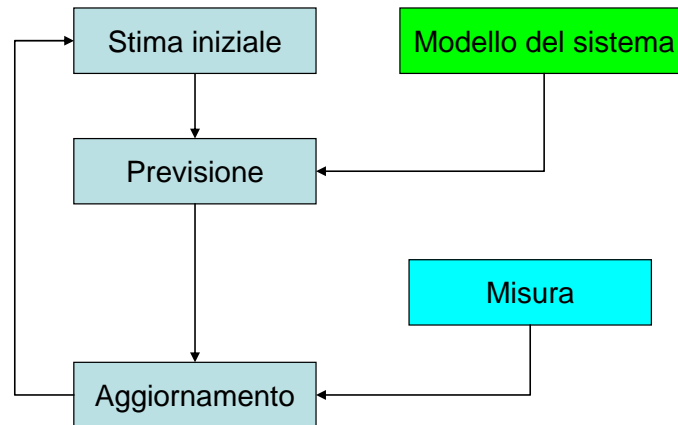


Figura 2-8: Schema logico della ricorsione del filtro di Kalman

La previsione è generata dal filtro utilizzando il modello di evoluzione del misurando mentre l'aggiornamento fa uso del modello di misura. Lo stadio di aggiornamento è quello di un tipico filtro lineare del primo ordine: si calcola una media pesata tra la previsione e la misura, in cui il peso $W(k)$ è associato alla misura $z(k)$ e il peso $1-W(k)H(k)$ è associato alla previsione $\hat{x}(k|k-1)$. Inoltre il filtro propaga la covarianza sia nella previsione, propagando l'incertezza dovuta al rumore associato al misurando (un semplice esempio è l'Equazione (2-23)), sia nell'aggiornamento della stima, propagando l'incertezza dovuta al rumore associato alla misura.

2.1.6.2. Misura delle prestazioni del filtro di Kalman

Per monitorare le prestazioni del filtro di Kalman si deve utilizzare una misura che sia indicativa di quanto bene il filtro riesce a “seguire” l'evoluzione dello stato nel tempo. E' possibile effettuare una previsione di quale osservazione sarà fatta all'istante k basata sulle osservazioni fatte fino all'istante $k-1$ calcolando il valore atteso dell'osservazione data dal modello ad essa associato (Equazione (2-4)) condizionatamente alle osservazioni precedenti:

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(k|k-1) &= E\{z(k) | Z^{k-1}\} \\
 &= E\{H(k)x(k) + D(k)w(k) | Z^{k-1}\} \\
 &= E\{H(k)x(k) | Z^{k-1}\} \\
 &= H(k)E\{x(k) | Z^{k-1}\} \\
 &= H(k)\hat{x}(k|k-1)
 \end{aligned}$$

quindi, come si poteva intuire, la previsione dell'osservazione al passo k si ottiene semplicemente applicando il modello di osservazione alla previsione dello stato.

La differenza tra l'osservazione $z(k)$ e la previsione dell'osservazione $H(k)\hat{x}(k|k-1)$ è chiamata **innovazione** o residuo $\rho(k)$:

$$\rho(k) = z(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1) \quad (2-32)$$

Non essendo possibile comparare direttamente le stime ottenute con il filtro e il valore vero dello stato, poiché molto spesso questo valore non lo si conosce, l'innovazione è un'importante misura della deviazione tra le stime del filtro e le osservazioni e può essere utilizzata come strumento per valutare l'efficienza del filtro. In particolare, ai fini della verifica delle ipotesi su cui si basano i modelli di stato e di osservazione e lo stesso filtro, si può verificare se sono soddisfatte le principali *proprietà delle innovazioni*, cioè che

$$E\{\rho(k) | Z^{k-1}\} = 0$$

$$E\{\rho(i)\rho^T(j)\} = \delta_{ij}S(i)$$

rispettivamente le due equazioni indicano che la sequenza delle innovazioni è bianca e scorrelata nel tempo. La matrice $S(k)$ è detta covarianza dell'innovazione e vale

$$S(k) = R(k) + H(k)P(k | k-1)H(k)^T$$

L'innovazione e la covarianza dell'innovazione possono essere utilizzate per esprimere in modo alternativo e più sintetico le equazioni di aggiornamento:

$$\hat{x}(k | k) = \hat{x}(k | k-1) + W(k)\rho(k)$$

$$P(k | k) = P(k | k-1) - W(k)S(k)W^T(k)$$

Dove

$$W(k) = P(k | k-1)H(k)S^{-1}(k)$$

Le equazioni di aggiornamento appena scritte si presentano nella stessa forma di quelle del semplice caso scalare a valori continui dell'Esempio 5 (Equazioni (2-24, 2-25, 2-26)), in cui la matrice di osservazione è la matrice identità, al posto della matrice P compare σ_x^2 , al posto di R compare σ_z^2 , al posto della matrice guadagno W compare il guadagno K .

2.2. **Alternative ai modelli probabilistici**

Risulta evidente come la rappresentazione dell'incertezza sia fondamentale per fornire l'informazione sull'osservazione dello stato necessaria al processo di fusione. Sono stati proposti diversi modelli di rappresentazione dell'incertezza alternativi a quelli probabilistici per porre rimedio alle limitazioni dei metodi probabilistici.

Dalla letteratura si possono evincere quattro limitazioni percepite nelle tecniche di modellazione secondo l'approccio probabilistico:

- **Complessità:** occorre specificare un gran numero di probabilità per essere in grado di applicare correttamente i metodi di ragionamento probabilistici
- **Incoerenza:** a causa delle difficoltà nello specificare un insieme coerente di stime probabilistiche e usarle per ottenere una deduzione coerente sullo stato di interesse
- **Accuratezza dei modelli:** la necessità di essere accurati nella definizione analitica delle probabilità per quantità di cui si ha poca conoscenza

- Definizione dell'incertezza: la difficoltà nell'assegnare delle probabilità all'incertezza sulla sorgente di informazione.

Esistono tre principali tecniche di modellazione che cercano di risolvere queste limitazioni:

1. *Calcolo degli intervalli*
2. *Logica Fuzzy*
3. *Teoria dell'Evidenza*

Si presenta di seguito un breve excursus su queste tecniche e i loro vantaggi e svantaggi.

2.2.1.1. Calcolo degli intervalli

Nella tecnica degli intervalli l'incertezza su una grandezza x è descritta semplicemente dall'affermazione che si sa che il valore vero dello stato x è limitato superiormente e inferiormente, cioè che appartiene a un intervallo, $x \in [a, b]$. Non viene aggiunta nessun'altra informazione di tipo probabilistico, in particolare nemmeno l'ipotesi che x sia uniformemente distribuito all'interno dell'intervallo (distribuzione rettangolare). Esistono delle regole di base per la manipolazione degli intervalli di incertezza [11].

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] \otimes [1/d, 1/c], \quad 0 \notin [c, d]$$

Le operazioni addizione e di moltiplicazione tra intervalli sono entrambe associative e commutative.

I principali vantaggi di questa tecnica:

- gli intervalli forniscono una buona misura nel caso di scarsità di informazioni probabilistiche sullo stato
- possono essere utilizzati per misure di individuazione di oggetti

Gli svantaggi:

- è difficile ottenere un valore di convergenza per la misura, ossia la stima dell'incertezza con intervalli è troppo pessimistica
- è difficile rappresentare la dipendenza tra variabili, il che è importante per molti algoritmi di data fusion

2.2.1.2. Fuzzy Logic

La Logica Fuzzy è ampiamente utilizzata per rappresentare l'incertezza specialmente negli algoritmi di supervisione e di sensor fusion a livello gerarchicamente alto. Esiste una vasta letteratura su questo metodo [7].

Caratteristica peculiare del ragionamento fuzzy, nonché unico strumento analitico di cui esso dispone, sono le *funzioni di appartenenza* (membership functions).

Se si considera un certo insieme di elementi $X = \{x\}$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$ tale che

$$A = \{x | x \text{ ha una specifica proprietà}\}$$

Nei sistemi logici convenzionali si definisce una funzione di appartenenza $\mu_A(x)$ che determina se un dato elemento $x \in X$ è membro o meno di questo sottoinsieme:

$$A \Leftrightarrow \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (2-33)$$

Nella logica fuzzy invece, un insieme fuzzy è definibile in modo tale per cui esiste un grado di appartenenza degli elementi all'insieme stesso, compreso tra 0 e 1. Pertanto la funzione di appartenenza assegna un valore compreso tra 0 e 1 che indica il grado di appartenenza di un elemento x ad un dato insieme A . Formalmente

$$A \Leftrightarrow \mu_A(x) \mapsto [0,1]$$

Le regole di composizione per gli insiemi fuzzy (fuzzy set) seguono gli stessi processi di composizioni degli insiemi crisp (quelli descritti dall'Equazione (2-33)), in particolare

l'operazione di AND è implementata come minimo:

$$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min([\mu_A(x), \mu_B(x)])$$

l'operazione di OR è implementata come massimo:

$$A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max([\mu_A(x), \mu_B(x)])$$

l'operazione di NOT è implementata come complemento:

$$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

2.2.1.3. Teoria dell'Evidenza

La teoria dell'evidenza nasce dalle idee di Dempster e Shafer. Essa si presenta più complessa degli altri metodi citati nel senso che la una probabilità può essere associata non solo ad un elemento x appartenente a un insieme X o a un sottoinsieme $A \subseteq X$, ma anche a insiemi di insiemi. Mentre il dominio dei metodi probabilistici è quello di tutti i possibili insiemi, il dominio della teoria dell'evidenza è quello di tutti gli insiemi di tutti i sottoinsiemi.

Esempio 6

Si consideri l'insieme $X = \{piove, non piove\}$. Nella teoria della probabilità, per mezzo di una previsione, possiamo assegnare una probabilità a ogni possibile evento. Ad esempio, $P(piove) = 0.8$ e quindi $P(non\ piove) = 0.2$. Secondo la teoria dell'evidenza invece, si costruisce l'insieme di tutti i sottoinsiemi (chiamato insieme potenza):

$$2^X = \{\{piove, non piove\}, \{piove\}, \{non piove\}, \{\}\}$$

A ciascuno degli elementi di quest'insieme viene assegnata una probabilità

$$m(\{piove, non piove\}) = 0.2$$

$$m(\{piove\}) = 0.7$$

$$m(\{non piove\}) = 0.1$$

$$m(\{ \}) = 0.0$$

Ossia si ha il 70% di probabilità che piova, il 10% che non piova e il 20% di probabilità che piova e non piova assieme, cioè una misura dell'ignoranza che abbiamo nel fare la previsione e distinguere tra le due alternative.

La teoria dell'evidenza fornisce un metodo per quantificare l'incapacità di distinguere tra le alternative. Nella teoria della probabilità questo si tradurrebbe con l'assegnare una probabilità uniforme a ciascuna alternativa. Certamente però, dire che si ha il 50% di probabilità che piova non è equivalente a dire che non si sa se piova oppure no. E' immediato osservare che questo comporta un aumento di complessità. Se infatti l'insieme originario ha n elementi, ci saranno 2^n possibili insiemi di sottoinsiemi a ciascuno dei quali si deve assegnare una probabilità. Per n grandi ciò è irrealizzabile. Inoltre, se l'insieme è continuo, l'insieme dei sottoinsiemi non è misurabile.

3. Bibliografia

- [1] J.O. Berger. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer Verlag, 1985.J.
- [2] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artec House, 1999.
- [3] Borenstein, L Feng, Measurement and Correction of Systematic Odometry Errors in Mobile Robots, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 12, No 5, Oct. 1996.
- [4] M. De Cecco. Self-Calibration of AGV Inertial-Odometric Navigation Using Absolute-Reference Measurements. IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Anchorage, AK, USA, 21-23 May 2002.
- [5] M De Cecco. Sensor fusion of inertial-odometric navigation as a function of the actual manoeuvres of autonomous guided vehicles. Measurement Science and Technology, vol. 14, pp 643-653, 2003.
- [6] De Cecco M., Baglivo L., Angrilli F., Real-Time Uncertainty Estimation of Autonomous Guided Vehicles Trajectory taking into account Correlated and Uncorrelated Effects. Special Section in IEEE Transaction on Instrumentation & Measurement, accepted for publication on June 2007.
- [7] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, 1980
- [8] *Guide to Expression of Uncertainty in Measurements* ISO 1993.
- [9] L. Jetto, S. Longhi, D. Vitali, Localization of a wheeled mobile robot by sensor data fusion based on a fuzzy logic adapted Kalman filter, Control Engineering Practice, vol 7, pp. 763-771, 1999.
- [10] Maybeck P.S., "The Kalman Filter. An introduction to concepts". In *Autonomous Robot Vehicles*, I.J. Cox, G.T Wilfong Editors, Springer-Verlag.
- [11] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice Hall, 1966.
- [12] S Shoal, I Zeitoun, E Lenz, Implementation of a Kalman filter in positioning for Autonomous Vehicles, and its Sensitivity to the Process Parameters, Int J Adv Manuf Technol, Vol 13, pp 738-746, 1997.
- [13] R. C. Smith, P. Cheeseman, On the representation and Estimation of Spatial Uncertainty, int. J. Of Robotics Research, Vol 5, no 4, pp 56-68, 1986.